KOLOKWIUM nr 5, 21.11.2016, godz. 12:15–13:00

Zadanie **7. (10 punktów)** Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$\frac{C}{n}\leqslant\sqrt[4]{n^4+15n^2}-n\leqslant\frac{4C}{n}\,.$$

Rozwiązanie:

Stosując wzór na różnicę czwartych potęg w postaci

$$a-b=\frac{a^4-b^4}{(a^2+b^2)\cdot(a+b)}$$

otrzymujemy

$$\sqrt[4]{n^4+15n^2}-n=\frac{15n^2}{\left(\sqrt{n^4+15n^2}+n^2\right)\cdot\left(\sqrt[4]{n^4+15n^2}+n\right)}=\frac{15}{n\cdot\left(\sqrt{1+\frac{15}{n^2}}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{1+\frac{15}{n^2}}+1\right)}$$

Szacowanie od dołu (mianownika od góry) prowadzi do:

$$\frac{15}{n\cdot\left(\sqrt{1+\frac{15}{n^2}}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{1+\frac{15}{n^2}}+1\right)}\geqslant\frac{15}{n\cdot\left(\sqrt{1+15}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{1+15}+1\right)}=\frac{1}{n}\,.$$

Szacowanie od góry (mianownika od dołu) prowadzi do:

$$\frac{15}{n\cdot\left(\sqrt{1+\frac{15}{n^2}}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{1+\frac{15}{n^2}}+1\right)}\leqslant\frac{15}{n\cdot\left(\sqrt{1+0}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{1+0}+1\right)}=\frac{15}{4n}<\frac{16}{4n}=\frac{4}{n}\,.$$

Zatem udowodniliśmy podane w treści zadania oszacowania ze stałą $C=1$.

Zadanie **8. (10 punktów)** Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^{16}+n^3}-n^8\right)^3}{\left(\sqrt{n^{16}+n^5}-n^8\right)^5}\,.$$

Rozwiązanie:

Stosując dwukrotnie (raz na poziomie licznika i raz na poziomie mianownika) wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}$$

otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^{16}+n^3}-n^8\right)^3}{\left(\sqrt{n^{16}+n^5}-n^8\right)^5} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^3}{\sqrt{n^{16}+n^3}+n^8}\right)^3 \cdot \left(\frac{\sqrt{n^{16}+n^5}+n^8}{n^5}\right)^5 =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^{-5}}{\sqrt{1+n^{-13}}+1}\right)^3 \cdot \left(\frac{\sqrt{1+n^{-11}}+1}{n^{-3}}\right)^5 = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{1+n^{-11}}+1\right)^5}{\left(\sqrt{1+n^{-13}}+1\right)^3} \cdot \frac{n^{-15}}{n^{-15}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{1+n^{-11}}+1\right)^5}{\left(\sqrt{1+n^{-13}}+1\right)^3} = \frac{\left(\sqrt{1+0}+1\right)^5}{\left(\sqrt{1+0}+1\right)^3} = \frac{2^5}{2^3} = 4\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu granica ma wartość 4.