

KOLOKWIUM nr 60, 3.02.2017, godz. 8:15–10:00**Zadanie 75. (20 punktów)**

W każdym z zadań **75.1-75.10** podaj w postaci uproszczonej kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** albo **NIE**, ewentualnie **T** albo **N**).

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty = \infty$.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie (i w postaci uproszczonej) oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz **2 punkty**.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie (i w postaci uproszczonej) oba kresy i poprawnie określisz przynależność jednego z nich do zbioru, otrzymasz **1 punkt**.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy (ale co najmniej jeden w postaci rażąco nieuproszczonej) i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz **1 punkt**.

Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ oznacza zbiór liczb naturalnych (całkowitych dodatnich).

$$\mathbf{75.1.} \quad A = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 2^{2^m} = 4^{4^n} \right\} \quad \text{Ocena}$$

$$\inf A = \mathbf{2}$$

$$\sup A = \mathbf{3}$$

Czy kres dolny należy do zbioru A **NIE** Czy kres górny należy do zbioru A **TAK**

$$\mathbf{75.2.} \quad B = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 2^{2^m} = 16^{16^n} \right\} \quad \text{Ocena}$$

$$\inf B = \mathbf{4}$$

$$\sup B = \mathbf{6}$$

Czy kres dolny należy do zbioru B **NIE** Czy kres górny należy do zbioru B **TAK**

$$\mathbf{75.3.} \quad C = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 4^{4^m} = 16^{16^n} \right\} \quad \text{Ocena}$$

$$\inf C = +\infty$$

$$\sup C = -\infty$$

Czy kres dolny należy do zbioru C **NIE** Czy kres górny należy do zbioru C **NIE**

$$\mathbf{75.4.} \quad D = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 3^{3^m} = 27^{27^n} \right\} \quad \text{Ocena}$$

$$\inf D = \mathbf{3}$$

$$\sup D = \mathbf{4}$$

Czy kres dolny należy do zbioru D **NIE** Czy kres górny należy do zbioru D **TAK**

$$75.5. E = \left\{ \frac{(-1)^n}{n^2 - 41} : n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{Ocena}$$

$$\inf E = -1/5$$

$$\sup E = 1/16$$

Czy kres dolny należy do zbioru E **TAK** Czy kres górny należy do zbioru E **TAK**

$$75.6. F = \left\{ \frac{(-1)^n}{n^2 - 43} : n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{Ocena}$$

$$\inf F = -1/6$$

$$\sup F = 1/18$$

Czy kres dolny należy do zbioru F **TAK** Czy kres górny należy do zbioru F **TAK**

$$75.7. G = \left\{ \frac{(-1)^n}{n^2 - 45} : n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{Ocena}$$

$$\inf G = -1/4$$

$$\sup G = 1/19$$

Czy kres dolny należy do zbioru G **TAK** Czy kres górny należy do zbioru G **TAK**

$$75.8. H = \left\{ \frac{x}{4} - \arctg x : x \in [0, +\infty) \right\} \quad \text{Ocena}$$

$$\inf H = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3}$$

$$\sup H = +\infty$$

Czy kres dolny należy do zbioru H **TAK** Czy kres górny należy do zbioru H **NIE**

$$75.9. I = \left\{ \frac{x}{2} - \arctg x : x \in [0, +\infty) \right\} \quad \text{Ocena}$$

$$\inf I = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$$

$$\sup I = +\infty$$

Czy kres dolny należy do zbioru I **TAK** Czy kres górny należy do zbioru I **NIE**

$$75.10. J = \left\{ \frac{3x}{4} - \arctg x : x \in [0, +\infty) \right\} \quad \text{Ocena}$$

$$\inf J = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6}$$

$$\sup J = +\infty$$

Czy kres dolny należy do zbioru J **TAK** Czy kres górny należy do zbioru J **NIE**

Zadanie 76. (20 punktów)

Niech funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją odwrotną do funkcji $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem

$$g(x) = \frac{x^3}{3} + x.$$

Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego wartości pochodnej drugiego rzędu funkcji f w podanych punktach.

Punktacja: Po **6 punktów** za każdą poprawną odpowiedź oraz dodatkowe **2 punkty** za komplet poprawnych odpowiedzi.

$$f''\left(\frac{4}{3}\right) = -1/4$$

$$f''\left(\frac{14}{3}\right) = -4/125$$

$$f''(12) = -3/500$$

Zadanie 77. (20 punktów)

O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że:

- $T(1)$ jest prawdziwe,
- $T(2)$ jest fałszywe,
- dla każdej liczby naturalnej n zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(3n)$,
- dla każdej liczby naturalnej $n > 8$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n-8)$.

W każdej kratce postaw jeden ze znaków **1**, **0**, **X**:

1 - implikacja $T(m) \Rightarrow T(n)$ jest prawdziwa (tzn. musi być prawdziwa przy powyższych założeniach)

0 - implikacja $T(m) \Rightarrow T(n)$ jest fałszywa (tzn. musi być fałszywa przy powyższych założeniach)

X - implikacja $T(m) \Rightarrow T(n)$ może być prawdziwa lub fałszywa (tzn. nie wiadomo, czasem bywa prawdziwa, a czasem fałszywa)

Za podanie k poprawnych odpowiedzi dostaniesz **$\max(k - 44, 0)$ punktów**.

	$n = 800$	$n = 801$	$n = 802$	$n = 803$	$n = 804$	$n = 805$	$n = 806$	$n = 807$
$m = 80$	1	1	X	1	X	X	X	X
$m = 81$	X	1	0	1	X	X	0	X
$m = 82$	1	1	1	1	1	1	1	1
$m = 83$	X	1	0	1	X	X	0	X
$m = 884$	X	1	X	1	1	X	X	X
$m = 885$	X	1	X	1	X	1	X	1
$m = 886$	1	1	1	1	1	1	1	1
$m = 887$	X	1	X	1	X	1	X	1