KOLOKWIUM nr 6, 28.11.2016, godz. 12:15–13:00

Zadanie **9. (10 punktów)** Wskazać liczbę rzeczywistą k, dla której granica

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^{666}+n^k}-n^{222}\right)$$

istnieje i jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Obliczyć wartość granicy przy tak wybranej liczbie k.

Rozwiązanie:

Korzystając ze wzoru na różnicę sześcianów w postaci

$$a-b=\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$$

przekształcamy daną w treści zadania granicę w następujący sposób:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^{666}+n^k}-n^{222}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{\left(n^{666}+n^k\right)^{2/3}+n^{222}\cdot\left(n^{666}+n^k\right)^{1/3}+n^{444}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{k-444}}{\left(1+n^{k-666}\right)^{2/3}+\left(1+n^{k-666}\right)^{1/3}+1}\,.$$

Mianownik ostatniego wyrażenia pod znakiem granicy dąży do 3 przy n dążącym do nieskończoności (o ile $k<666$), natomiast licznik jest równy 1, gdy $k=444$.

Dla $k=444$ mamy więc

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{k-444}}{\left(1+n^{k-666}\right)^{2/3}+\left(1+n^{k-666}\right)^{1/3}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+n^{-222}\right)^{2/3}+\left(1+n^{-222}\right)^{1/3}+1}=\frac{1}{3}\,.$$

Odpowiedź: Dla $k=444$ dana w zadaniu granica ma wartość $1/3$.

Uwaga: Ponieważ do rozwiązującego należy swobodny wybór liczby k, nie jest konieczne rozstrzyganie, czy istnieją inne liczby k spełniające warunki zadania. Nietrudno jednak zauważyć, że dla $k\geqslant 666$ dana w zadaniu granica jest równa $+\infty$.

Zadanie **10. (10 punktów)**
Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{k\cdot n^k+1}}{n^{13}+1}+\frac{\sqrt{k\cdot n^k+2}}{n^{13}+2}+\frac{\sqrt{k\cdot n^k+3}}{n^{13}+3}+\frac{\sqrt{k\cdot n^k+4}}{n^{13}+4}+\ldots+\frac{\sqrt{k\cdot n^k+n^5}}{n^{13}+n^5}\right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej dodatniej parametru k, aby powyższa granica była dodatnia i skończona.

Rozwiązanie:
Zauważamy, że dana w zadaniu suma ma n^5 wyrazów. Szacujemy ją obustronnie:

$$n^5\cdot\frac{\sqrt{k\cdot n^k+0}}{n^{13}+n^5}\leqslant\frac{\sqrt{k\cdot n^k+1}}{n^{13}+1}+\frac{\sqrt{k\cdot n^k+2}}{n^{13}+2}+\ldots+\frac{\sqrt{k\cdot n^k+n^5}}{n^{13}+n^5}\leqslant n^5\cdot\frac{\sqrt{k\cdot n^k+n^5}}{n^{13}+0},$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego przy $n\to+\infty$.

$$n^5\cdot\frac{\sqrt{k\cdot n^k+0}}{n^{13}+n^5}=\frac{\sqrt{k\cdot n^k}}{n^8+1}=\frac{\sqrt{k}\cdot n^{k/2}}{n^8+1}=\frac{\sqrt{k}\cdot n^{k/2-8}}{1+\frac{1}{n^8}}\to\sqrt{k},$$

o ile $k/2-8=0$, czyli $k=16$.

$$n^5\cdot\frac{\sqrt{k\cdot n^k+n^5}}{n^{13}+0}=\frac{\sqrt{k\cdot n^k+n^5}}{n^8}=\sqrt{k\cdot n^{k-16}+\frac{1}{n^{11}}}\to\sqrt{k},$$

o ile $k-16=0$, czyli $k=16$.

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że dla $k=16$ granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 4.