KOLOKWIUM nr 81, 6.12.2016, godz. 9:15–10:00

Zadanie **81.** **(20 punktów)** Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$\frac{2}{5}\cdot n\cdot(n+1)\cdot\sqrt{n} \ < \ \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k^3} \ < \ \frac{2}{5}\cdot n\cdot(n+1)\cdot\sqrt{n+1}\,.$$

Rozwiązanie:
Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n=1$ dowodzone nierówności przyjmują postać

$$\frac{2}{5}\cdot 2 \ < \ 1 \ < \ \frac{2}{5}\cdot 2\sqrt{2}\,,$$

wystarczy więc zauważyć, że

$$\frac{4}{5}<1$$

oraz

$$\frac{4\sqrt{2}}{5}=\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{25}}>1\,.$$

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że prawdziwe są nierówności

$$\frac{2}{5}\cdot n\cdot(n+1)\cdot\sqrt{n} \ < \ \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k^3} \ < \ \frac{2}{5}\cdot n\cdot(n+1)\cdot\sqrt{n+1}\,. \qquad (1)$$

Udowodnimy, że wówczas analogiczne nierówności są prawdziwe po zastąpieniu liczby n liczbą $n+1$, a mianowicie

$$\frac{2}{5}\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot\sqrt{n+1} \ < \ \sum_{k=1}^{n+1}\sqrt{k^3} \ < \ \frac{2}{5}\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot\sqrt{n+2}\,. \qquad (2)$$

W celu dowodu lewej nierówności (2) skorzystamy z lewej nierówności założenia indukcyjnego (1). Otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{n+1}\sqrt{k^3}=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k^3}+\sqrt{(n+1)^3}>\frac{2}{5}\cdot n\cdot(n+1)\cdot\sqrt{n}+\sqrt{(n+1)^3}\,,$$

a więc do zakończenia dowodu lewej nierówności (2) wystarczy dowieść, że

$$\frac{2}{5}\cdot n\cdot(n+1)\cdot\sqrt{n}+\sqrt{(n+1)^3}\geqslant\frac{2}{5}\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot\sqrt{n+1}\,. \qquad (3)$$

Przekształcanie nierówności (3) prowadzi kolejno do nierówności równoważnych:

$$\frac{2}{5}\cdot n\cdot(n+1)\cdot\sqrt{n}+\sqrt{(n+1)^3}\geqslant\frac{2}{5}\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot\sqrt{n+1}\,, \qquad \Big|:\sqrt{(n+1)^3}$$

$$\frac{2}{5}\cdot\frac{n\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}+1\geqslant\frac{2}{5}\cdot(n+2)\,,$$

$$\frac{2\cdot n\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}+5\geqslant 2\cdot(n+2)\,,$$

$$\frac{2\cdot n\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\geqslant 2n-1\,,$$

$$2\cdot n\cdot\sqrt{n}\geqslant(2n-1)\cdot\sqrt{n+1}\,,$$
$$4\cdot n^3\geqslant(2n-1)^2\cdot(n+1)\,,$$
$$(2n)^3\geqslant(2n-1)^2\cdot(2n+2)\,,$$

a ta nierówność jest prawdziwa jako odpowiednio przekształcona nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną liczb $2n-1$, $2n-1$ i $2n+2$.

Analogicznie postępujemy dla dowodu prawej nierówności (2). Korzystając z prawej nierówności założenia indukcyjnego (1) otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{n+1}\sqrt{k^3}=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k^3}+\sqrt{(n+1)^3}<\frac{2}{5}\cdot n\cdot(n+1)\cdot\sqrt{n+1}+\sqrt{(n+1)^3}\,,$$

a więc do zakończenia dowodu prawej nierówności (2) wystarczy dowieść, że

$$\frac{2}{5}\cdot n\cdot(n+1)\cdot\sqrt{n+1}+\sqrt{(n+1)^3}\leqslant\frac{2}{5}\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot\sqrt{n+2}\,. \tag{4}$$

Przekształcanie nierówności (4) prowadzi kolejno do nierówności równoważnych:

$$\frac{2}{5}\cdot n\cdot(n+1)\cdot\sqrt{n+1}+\sqrt{(n+1)^3}\leqslant\frac{2}{5}\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot\sqrt{n+2}\,,\qquad\Big|:\sqrt{(n+1)^3}$$
$$\frac{2}{5}\cdot n+1\leqslant\frac{2}{5}\cdot\frac{(n+2)\cdot\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}}\,,$$
$$2\cdot n+5\leqslant\frac{2\cdot(n+2)\cdot\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}}\,,$$
$$(2n+5)\cdot\sqrt{n+1}\leqslant 2\cdot(n+2)\cdot\sqrt{n+2}\,,$$
$$(2n+5)^2\cdot(n+1)\leqslant 4\cdot(n+2)^3\,,$$
$$2\cdot(2n+5)^2\cdot(n+1)\leqslant 8\cdot(n+2)^3\,,$$
$$(2n+5)^2\cdot(2n+2)\leqslant(2n+4)^3\,,$$

a ta nierówność jest prawdziwa jako odpowiednio przekształcona nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną liczb $2n+5$, $2n+5$ i $2n+2$.

Na mocy zasady indukcji matematycznej dane w zadaniu nierówności zostały udowodnione dla każdej liczby naturalnej n.