KOLOKWIUM nr 82, 13.12.2016, godz. 9:15–10:00

Zadanie **82.** **(20 punktów)** Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N} \ \land \ 3^{3^m} \leqslant 2^{2^n}\right\}.$$

Rozwiązanie:

Każdy element zbioru jest dodatni, a przyjęcie $m=1$ oraz $n\geqslant 3$, wobec nierówności

$$3^{3^1}=27<32=2^5<2^8=2^{2^3}\leqslant 2^{2^n},$$

prowadzi do ciągu $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=3}^{\infty}$ elementów zbioru, zbieżnego do 0. Zatem kres dolny zbioru jest równy 0.

Dwukrotne zlogarytmowanie przy podstawie 3 nierówności

$$3^{3^m}\leqslant 2^{2^n} \tag{1}$$

prowadzi kolejno do nierówności równoważnych:

$$3^m\leqslant 2^n\cdot\log_3 2,$$

$$m\leqslant n\cdot\log_3 2+\log_3\log_3 2,$$

$$\frac{m}{n}\leqslant\log_3 2+\frac{\log_3\log_3 2}{n},$$

$$\frac{m}{n}\leqslant\log_3 2-\frac{C}{n} \quad < \ \log_3 2, \tag{2}$$

gdzie $C=-\log_3\log_3 2>0$.

Wynika stąd, że wszystkie elementy danego zbioru są mniejsze od $\log_3 2$.

Niech teraz a/b, gdzie $a,b\in\mathbb{N}$, będzie dowolną liczbą wymierną dodatnią mniejszą od $\log_3 2$. Dla liczby naturalnej k przyjmijmy

$$m=ak \qquad \text{oraz} \qquad n=bk.$$

Lewa nierówność (2), równoważna nierówności (1), przybiera wówczas postać

$$\frac{m}{n}=\frac{a}{b}\leqslant\log_3 2-\frac{C}{bk}. \tag{3}$$

Ponieważ przy $k\to\infty$

$$\log_3 2-\frac{C}{bk}\to\log_3 2>\frac{a}{b},$$

nierówność (3) jest prawdziwa dla odpowiednio dużej liczby naturalnej k, a to oznacza, że liczba $m/n=a/b$ jest elementem zbioru danego w treści zadania.

Odpowiedź: Kres dolny danego zbioru jest równy 0, a kres górny $\log_3 2$.