KOLOKWIUM nr 83, 3.01.2017, godz. 9:15–10:00

Zadanie **83. (20 punktów)**

Dane są takie szeregi zbieżne $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ o wyrazach dodatnich, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 8, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} c_n = 27\,.$$

Dowieść, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{a_n b_n c_n} \leqslant C\,,$$

gdzie $C=6$ **(za 20 punktów)** lub $C=12$ **(za 8 punktów).**

Rozwiązanie:

Korzystając z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{a_n b_n c_n} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n+b_n+c_n}{3} = \frac{1}{3} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \right) = \frac{1+8+27}{3} = \frac{36}{3} = 12$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{a_n b_n c_n} = 6 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{a_n \cdot \frac{b_n}{8} \cdot \frac{c_n}{27}} \leqslant 6 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + \frac{b_n}{8} + \frac{c_n}{27}}{3} = 2 \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{27} \right) =$$

$$= 2 \cdot (1+1+1) = 6\,.$$