KOLOKWIUM nr 84, 10.01.2017, godz. 9:15–10:00

Zadanie **84.** **(20 punktów)**

Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot\sqrt{n+1}+(n+1)\cdot\sqrt{n}}\,.$$

Rozwiązanie:

Korzystając z równości

$$\frac{1}{n\cdot\sqrt{n+1}+(n+1)\cdot\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}\cdot\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

przekształcamy N-tą sumę częściową danego szeregu:

$$S_N=\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n\cdot\sqrt{n+1}+(n+1)\cdot\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{6}}-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)+\ldots$$

$$\ldots+\left(\frac{1}{\sqrt{N-2}}-\frac{1}{\sqrt{N-1}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{N-1}}-\frac{1}{\sqrt{N}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{N}}-\frac{1}{\sqrt{N+1}}\right)=1-\frac{1}{\sqrt{N+1}}\,,$$

co przy N dążącym do $+\infty$ zbiega do 1.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg ma sumę równą 1.