KOLOKWIUM nr 85, 17.01.2017, godz. 9:15–10:00

Zadanie **85. (20 punktów)**

Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\sqrt[8]{x^2+1029}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{C},$$

gdzie $C=98$ **(za 20 punktów)** lub $C=48$ **(za 8 punktów).**

Rozwiązanie:

Rozwiązanie za 8 punktów:

Skorzystamy ze wzoru skróconego mnożenia

$$a^8-b^8=\left(a^4-b^4\right)\cdot\left(a^4+b^4\right)=\left(a^2-b^2\right)\cdot\left(a^2+b^2\right)\cdot\left(a^4+b^4\right)=$$
$$=(a-b)\cdot(a+b)\cdot\left(a^2+b^2\right)\cdot\left(a^4+b^4\right),$$

który przy założeniu $a+b\neq 0$ można zapisać w postaci

$$a-b=\frac{a^8-b^8}{(a+b)\cdot(a^2+b^2)\cdot(a^4+b^4)}.$$

Przyjmując $a=\sqrt[8]{x^2+1029}$ oraz $b=\sqrt[8]{y^2+1029}$, zauważamy, że $a+b>0$ i przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności:

$$|f(x)-f(y)|=\left|\sqrt[8]{x^2+1029}-\sqrt[8]{y^2+1029}\right|=$$

$$=\left|\frac{(x^2+1029)-(y^2+1029)}{\left(\sqrt[8]{x^2+1029}+\sqrt[8]{y^2+1029}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^2+1029}+\sqrt[4]{y^2+1029}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1029}+\sqrt{y^2+1029}\right)}\right|=$$

$$=\frac{|x^2-y^2|}{\left(\sqrt[8]{x^2+1029}+\sqrt[8]{y^2+1029}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^2+1029}+\sqrt[4]{y^2+1029}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1029}+\sqrt{y^2+1029}\right)}=$$

$$=\frac{|x-y|\cdot|x+y|}{\left(\sqrt[8]{x^2+1029}+\sqrt[8]{y^2+1029}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^2+1029}+\sqrt[4]{y^2+1029}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1029}+\sqrt{y^2+1029}\right)}.$$

Korzystając z nierówności trójkąta i wykorzystując równość $|x|=\sqrt{x^2}$ otrzymujemy:

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|=\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}<\sqrt{x^2+1029}+\sqrt{y^2+1029},$$

skąd

$$\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+1029}+\sqrt{y^2+1029}}<1.$$

Ponadto zauważamy, że

$$\frac{1}{\sqrt[8]{x^2+1029}+\sqrt[8]{y^2+1029}}\leqslant\frac{1}{\sqrt[8]{0+1029}+\sqrt[8]{0+1029}}=\frac{1}{2\cdot\sqrt[8]{1029}}.$$

Analogicznie

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x^2+1029}+\sqrt[4]{y^2+1029}}\leqslant\frac{1}{\sqrt[4]{0+1029}+\sqrt[4]{0+1029}}=\frac{1}{2\cdot\sqrt[4]{1029}}.$$

Wykorzystanie tych nierówności pozwala dokończyć oszacowania:

$$\frac{|x-y|\cdot|x+y|}{\left(\sqrt[8]{x^2+1029}+\sqrt[8]{y^2+1029}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^2+1029}+\sqrt[4]{y^2+1029}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1029}+\sqrt{y^2+1029}\right)}=$$

$$=|x-y|\cdot\frac{1}{\sqrt[8]{x^2+1029}+\sqrt[8]{y^2+1029}}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{x^2+1029}+\sqrt[4]{y^2+1029}}\cdot\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+1029}+\sqrt{y^2+1029}}\leqslant$$

$$\leqslant|x-y|\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt[8]{1029}}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt[4]{1029}}\cdot 1=\frac{|x-y|}{4\cdot\sqrt[8]{1029^3}}\leqslant\frac{|x-y|}{4\cdot\sqrt[8]{1024^3}}=\frac{|x-y|}{4\cdot\sqrt[8]{2^{30}}}=\frac{|x-y|}{4\cdot\sqrt[4]{2^{15}}}=$$

$$=\frac{|x-y|}{4\cdot\sqrt[4]{2^8}\cdot\sqrt[4]{2^7}}=\frac{|x-y|}{4\cdot 4\cdot\sqrt[4]{128}}=\frac{|x-y|}{16\cdot\sqrt[4]{128}}\leqslant\frac{|x-y|}{16\cdot\sqrt[4]{81}}=\frac{|x-y|}{16\cdot 3}=\frac{|x-y|}{48}\,.$$

Rozwiązanie za 20 punktów:

Pominąwszy trywialny przypadek $x=y$, z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej rachunku różniczkowego wynika równość

$$|f(x)-f(y)|=|x-y|\cdot|f'(c)|\,,$$

gdzie c leży pomiędzy x i y.

Wystarczy więc wykazać, że $|f'(x)|\leqslant 1/98$ dla każdej liczby rzeczywistej x.

Przyjmując[1]

$$g(x)=f'(x)=\frac{x}{4\cdot\left(x^2+1029\right)^{7/8}}$$

otrzymujemy

$$\lim_{x\to\pm\infty}g(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{4\cdot\left(x^2+1029\right)^{7/8}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^{-3/4}}{4\cdot\left(1+1029\cdot x^{-2}\right)^{7/8}}=0\,.$$

Zauważmy, że g jest różniczkowalna na całej prostej, a jej pochodna jest dana wzorem

$$g'(x)=\frac{1}{4\cdot\left(x^2+1029\right)^{7/8}}-\frac{7x^2}{16\cdot\left(x^2+1029\right)^{15/8}}\,.$$

Rozwiązujemy równanie na zerowanie się tej pochodnej:

$$\frac{1}{4\cdot\left(x^2+1029\right)^{7/8}}=\frac{7x^2}{16\cdot\left(x^2+1029\right)^{15/8}}\,,$$

$$4\cdot\left(x^2+1029\right)=7x^2\,,$$

$$4\cdot 1029=3x^2\,,\qquad 4\cdot 3\cdot 343=3x^2\,,\qquad 4\cdot 7^3=x^2\,,\qquad x=\pm 14\cdot\sqrt{7}\,.$$

Wyliczamy wartość funkcji g w miejscach zerowych pochodnej:

$$g\left(\pm 14\cdot\sqrt{7}\right)=\frac{\pm 14\cdot\sqrt{7}}{4\cdot\left((\pm 14\cdot\sqrt{7})^2+1029\right)^{7/8}}=\pm\frac{7\cdot\sqrt{7}}{2\cdot\left(4\cdot 7^3+3\cdot 7^3\right)^{7/8}}=$$

$$=\pm\frac{7\cdot\sqrt{7}}{2\cdot\left(7^4\right)^{7/8}}=\pm\frac{7\cdot\sqrt{7}}{2\cdot 7^{7/2}}=\pm\frac{1}{98}\,.$$

Stąd wynika, że funkcja g przyjmuje najmniejszą i największą wartość odpowiednio $-1/98$ i $1/98$, skąd $|g(x)|\leqslant 1/98$ dla każdej liczby rzeczywistej x.

[1] W celu uniknięcia pojęcia pochodnej drugiego rzędu.