KOLOKWIUM nr 86, 24.01.2017, godz. 9:15–10:00

Zadanie **86. (20 punktów)**

Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\sqrt[4]{x^2+12}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x,y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{C}\,,$$

gdzie $C=6$ **(za 20 punktów)** lub $C=3$ **(za 5 punktów).**

Rozwiązanie:

Rozwiązanie za 5 punktów:

Skorzystamy ze wzoru skróconego mnożenia

$$a^4-b^4=\left(a^2-b^2\right)\cdot\left(a^2+b^2\right)=(a-b)\cdot(a+b)\cdot\left(a^2+b^2\right),$$

który przy założeniu $a+b\neq 0$ można zapisać w postaci

$$a-b=\frac{a^4-b^4}{(a+b)\cdot(a^2+b^2)}\,.$$

Przyjmując $a=\sqrt[4]{x^2+12}$ oraz $b=\sqrt[4]{y^2+12}$, zauważamy, że $a+b>0$ i przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności:

$$|f(x)-f(y)|=\left|\sqrt[4]{x^2+12}-\sqrt[4]{y^2+12}\right|=\left|\frac{(x^2+12)-(y^2+12)}{\left(\sqrt[4]{x^2+12}+\sqrt[4]{y^2+12}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+12}+\sqrt{y^2+12}\right)}\right|=$$

$$=\frac{|x^2-y^2|}{\left(\sqrt[4]{x^2+12}+\sqrt[4]{y^2+12}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+12}+\sqrt{y^2+12}\right)}=$$

$$=\frac{|x-y|\cdot|x+y|}{\left(\sqrt[4]{x^2+12}+\sqrt[4]{y^2+12}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+12}+\sqrt{y^2+12}\right)}\,.$$

Korzystając z nierówności trójkąta i wykorzystując równość $|x|=\sqrt{x^2}$ otrzymujemy:

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|=\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}<\sqrt{x^2+12}+\sqrt{y^2+12}\,,$$

skąd

$$\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+12}+\sqrt{y^2+12}}<1\,.$$

Ponadto zauważamy, że

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x^2+12}+\sqrt[4]{y^2+12}}\leqslant\frac{1}{\sqrt[4]{0+12}+\sqrt[4]{0+12}}=\frac{1}{2\cdot\sqrt[4]{12}}\,.$$

Wykorzystanie tych nierówności pozwala dokończyć oszacowania:

$$\frac{|x-y|\cdot|x+y|}{\left(\sqrt[4]{x^2+12}+\sqrt[4]{y^2+12}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+12}+\sqrt{y^2+12}\right)}=$$

$$=|x-y|\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{x^2+12}+\sqrt[4]{y^2+12}}\cdot\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+12}+\sqrt{y^2+12}}\leqslant$$

$$\leqslant|x-y|\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt[4]{12}}\cdot 1=\frac{|x-y|}{\sqrt[4]{16\cdot 12}}\leqslant\frac{|x-y|}{\sqrt[4]{9\cdot 9}}=\frac{|x-y|}{3}\,.$$

Rozwiązanie za 20 punktów:

Pominąwszy trywialny przypadek $x=y$, z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej rachunku różniczkowego wynika równość

$$|f(x)-f(y)|=|x-y|\cdot|f'(c)|,$$

gdzie c leży pomiędzy x i y.

Wystarczy więc wykazać, że $|f'(x)|\leqslant 1/6$ dla każdej liczby rzeczywistej x.

Przyjmując[1]

$$g(x)=f'(x)=\frac{x}{2\cdot\left(x^2+12\right)^{3/4}}$$

otrzymujemy

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{2\cdot\left(x^2+12\right)^{3/4}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^{-1/2}}{2\cdot\left(1+12\cdot x^{-2}\right)^{3/4}}=0\,.$$

Zauważmy, że g jest różniczkowalna na całej prostej, a jej pochodna jest dana wzorem

$$g'(x)=\frac{1}{2\cdot\left(x^2+12\right)^{3/4}}-\frac{3x^2}{4\cdot\left(x^2+12\right)^{7/4}}\,.$$

Rozwiązujemy równanie na zerowanie się tej pochodnej:

$$\frac{1}{2\cdot\left(x^2+12\right)^{3/4}}=\frac{3x^2}{4\cdot\left(x^2+12\right)^{7/4}}\,,$$

$$2\cdot\left(x^2+12\right)=3x^2\,,$$

$$2\cdot 12=x^2\,,$$

$$x=\pm 2\cdot\sqrt{6}\,.$$

Wyliczamy wartość funkcji g w miejscach zerowych pochodnej:

$$g\left(\pm 2\cdot\sqrt{6}\right)=\frac{\pm 2\cdot\sqrt{6}}{2\cdot\left(\left(\pm 2\cdot\sqrt{6}\right)^2+12\right)^{3/4}}=\pm\frac{2\cdot\sqrt{6}}{2\cdot 36^{3/4}}=\pm\frac{2\cdot\sqrt{6}}{2\cdot 6^{3/2}}=\pm\frac{1}{6}\,.$$

Stąd wynika, że funkcja g przyjmuje najmniejszą i największą wartość odpowiednio $-1/6$ i $1/6$, skąd $|g(x)|\leqslant 1/6$ dla każdej liczby rzeczywistej x.

[1] W celu uniknięcia pojęcia pochodnej drugiego rzędu, gdyż to pojęcie nie obowiązuje na tym kolokwium.