KOLOKWIUM nr 87, 31.01.2017, godz. 9:15–10:15

Zadanie **87. (40 punktów)**

Dowieść, że nierówność

$$(n+1)^{3n+3} < n^{2n} \cdot (n+3)^{n+3}$$

... zachodzi dla dowolnej liczby naturalnej n. **(wersja za 30 punktów)**

... zachodzi dla dowolnej liczby rzeczywistej $n>0$. **(wersja za 40 punktów)**

Rozwiązanie:

Sposób I: **(za 40 punktów)**

Po obustronnym zlogarytmowaniu przy podstawie e dana w zadaniu nierówność przybiera postać

$$3 \cdot f(n+1) < 2 \cdot f(n) + f(n+3)\,, \qquad (\spadesuit)$$

gdzie $f(x) = x \cdot \ln x$ dla $x>0$. Ponieważ $f'(x) = \ln x + \frac{x}{x} = \ln x + 1$ oraz $f''(x) = 1/x > 0$, funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $(0, +\infty)$, skąd wynika nierówność

$$f\left(\frac{2}{3} \cdot x + \frac{1}{3} \cdot y\right) < \frac{2}{3} \cdot f(x) + \frac{1}{3} \cdot f(y)$$

prawdziwa dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych dodatnich x, y. W szczególności dla $x=n$ oraz $y=n+3$ otrzymujemy

$$f\left(\frac{2}{3} \cdot n + \frac{1}{3} \cdot (n+3)\right) < \frac{2}{3} \cdot f(n) + \frac{1}{3} \cdot f(n+3)\,,$$

czyli

$$f(n+1) < \frac{2}{3} \cdot f(n) + \frac{1}{3} \cdot f(n+3)\,,$$

a to po obustronnym pomnożeniu przez 3 daje nierówność $(\spadesuit)$.

Sposoby II–IV: **(za 30 punktów)**

Nierówność między średnią geometryczną i arytmetyczną może być sformułowana w następującej postaci: Iloczyn ustalonej liczby czynników nieujemnych o ustalonej sumie jest największy, gdy wszystkie jego czynniki są równe.

W prosty sposób wynika stąd następujące uogólnienie: Jeżeli dane są dwa iloczyny o takiej samej liczbie czynników nieujemnych, a przy tym jeden z tych iloczynów ma wszystkie czynniki równe oraz ma sumę czynników większą lub równą sumie czynników drugiego iloczynu, to jego wartość jest większa.

Chcąc zastosować powyższy wniosek do dowodu nierówności podanej w zadaniu, przemnożymy ją stronami przez n^6, aby po prawej stronie otrzymać iloczyn równych czynników. Dostajemy nierówność równoważną

$$n^6 \cdot (n+1)^{3n+3} < n^{2n+6} \cdot (n+3)^{n+3}\,,$$

czyli

$$n^6 \cdot (n+1)^{3n+3} < \left(n^3+3n^2\right)^{n+3}.$$

Dla dokończenia rozwiązania wystarczy odpowiednio pogrupować czynniki po lewej stronie ostatniej nierówności.

Sposób II:

$$\left(n^3\right)^2\cdot\left((n+1)^3\right)^{n+1}<\left(n^3+3n^2\right)^{n+3},$$

$$\left(n^3\right)^2\cdot\left(n^3+3n^2+3n+1\right)^{n+1}<\left(n^3+3n^2\right)^{n+3},$$

co wymaga następującej nierówności między sumami czynników:

$$2\cdot n^3+(n+1)\cdot\left(n^3+3n^2+3n+1\right)\leqslant(n+3)\cdot\left(n^3+3n^2\right),$$

$$2\cdot n^3+n^4+4n^3+6n^2+4n+1\leqslant n^4+6n^3+9n^2,$$

$$n^4+6n^3+6n^2+4n+1\leqslant n^4+6n^3+9n^2,$$

$$4n+1\leqslant 3n^2,$$

a to jest spełnione dla każdej liczby całkowitej $n\geqslant 2$, gdyż wówczas

$$4n+1<4n+n=5n<6n\leqslant 3n^2.$$

Pozostaje sprawdzić, że dla $n=1$ dowodzona nierówność przyjmuje postać

$$2^6<4^4,$$

czyli

$$2^6<2^8.$$

Sposób III:

$$\left(n^2\cdot(n+1)\right)^3\cdot\left((n+1)^3\right)^n<\left(n^3+3n^2\right)^{n+3},$$

$$\left(n^3+n^2\right)^3\cdot\left(n^3+3n^2+3n+1\right)^n<\left(n^3+3n^2\right)^{n+3},$$

co wymaga następującej nierówności między sumami czynników:

$$3\cdot\left(n^3+n^2\right)+n\cdot\left(n^3+3n^2+3n+1\right)\leqslant(n+3)\cdot\left(n^3+3n^2\right),$$

$$3n^3+3n^2+n^4+3n^3+3n^2+n\leqslant n^4+6n^3+9n^2,$$

$$n^4+6n^3+6n^2+n\leqslant n^4+6n^3+9n^2,$$

$$n\leqslant 3n^2,$$

a to jest spełnione dla każdej liczby całkowitej $n\geqslant 1$.

Sposób IV: Jeżeli $n\geqslant 3$, to możemy dokonać następującego pogrupowania czynników:

$$\left(n\cdot(n+1)^2\right)^6\cdot\left((n+1)^3\right)^{n-3}<\left(n^3+3n^2\right)^{n+3},$$

$$\left(n^3+2n^2+n\right)^6\cdot\left(n^3+3n^2+3n+1\right)^{n-3}<\left(n^3+3n^2\right)^{n+3},$$

a to wymaga następującej nierówności między sumami czynników:

$$6\cdot\left(n^3+2n^2+n\right)+(n-3)\cdot\left(n^3+3n^2+3n+1\right)\leqslant(n+3)\cdot\left(n^3+3n^2\right),$$

$$6n^3+12n^2+6n+n^4-6n^2-8n-3\leqslant n^4+6n^3+9n^2,$$

$$n^4+6n^3+6n^2+2n-3\leqslant n^4+6n^3+9n^2,$$

$$2n-3\leqslant 3n^2,$$

co jest spełnione dla każdej liczby naturalnej n.

Pozostaje sprawdzić, że dla $n=1$ dowodzona nierówność przyjmuje postać

$$2^6 < 4^4 ,$$

czyli

$$2^6 < 2^8 ,$$

a dla $n=2$ sprowadza się do

$$3^9 < 2^4 \cdot 5^5 ,$$

co wynika z nierówności

$$3^9 = 3 \cdot 9^4 < 5 \cdot 10^4 = 2^4 \cdot 5^5 .$$

Sposób V (pomysł tego sposobu rozwiązania pochodzi z pracy Pana Mateusza Skórskiego):
(za 40 punktów)

Przepisujemy dowodzoną nierówność w postaci

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} < \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n+3} ,$$

czyli

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} < \left(1+\frac{1}{(n+1)/2}\right)^{2\cdot((n+1)/2+1)} . \qquad (\spadesuit\spadesuit)$$

Nierówność ($\spadesuit\spadesuit$) wynika łatwo z nierówności

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < e < \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1} , \qquad (\heartsuit)$$

które są prawdziwe dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich n i m – dla dowodu nierówności ($\spadesuit\spadesuit$) wystarczy przyjąć w nierównościach ($\heartsuit$) $m=(n+1)/2$ i podnieść je stronami do kwadratu.

Udowodnimy teraz nierówności ($\heartsuit$).

Lewa nierówność ($\heartsuit$) po obustronnym zlogarytmowaniu przy podstawie e przyjmuje postać

$$n \cdot \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1 ,$$

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} ,$$

co po podstawieniu $x=1/n$ sprowadza się do

$$\ln(1+x) < x \qquad \text{dla} \quad x>0 . \qquad (\clubsuit)$$

Z kolei obustronne zlogarytmowanie przy podstawie e prawej nierówności ($\heartsuit$) prowadzi do następujących nierówności równoważnych:

$$1 < (m+1) \cdot \ln\left(1+\frac{1}{m}\right) ,$$

$$\frac{1}{m+1} < \ln\left(\frac{m+1}{m}\right) ,$$

$$\frac{1}{m+1} < -\ln\left(\frac{m}{m+1}\right) ,$$

$$-\frac{1}{m+1}>\ln\left(1-\frac{1}{m+1}\right),$$

co po podstawieniu $x=-1/(m+1)$ sprowadza się do

$$\ln(1+x)<x \qquad \text{dla} \quad -1<x<0\,. \tag{$\diamondsuit$}$$

Dla zakończenia rozwiązania wystarczy wykazać, że

$$\ln(1+x)<x \qquad \text{dla} \quad x>-1,\ x\neq 0\,. \tag{$\diamondsuit\clubsuit$}$$

W tym celu rozważmy funkcję $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ określoną wzorem

$$f(x)=\ln(x+1)-x\,.$$

Wówczas $f(0)=0$, a ponadto

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}-1 \quad \begin{cases} >0 & \text{dla} \quad x\in(-1,0) \\ <0 & \text{dla} \quad x>0 \end{cases}$$

Zatem funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-1,0)$ i malejąca w przedziale $(0,+\infty)$, osiąga więc maksimum równe 0 w punkcie 0. Stąd $f(x)<0$ dla $x\in(-1,+\infty)\setminus\{0\}$, co jest równoważne nierówności ($\diamondsuit\clubsuit$).