KOLOKWIUM nr 9, 3.01.2017, godz. 9:15–10:00 AFISZ

Zadanie **13.** **(10 punktów)**

Niech funkcja $f:[3,\infty)\to\mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x,y\in[3,\infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{25}\,.$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy i szacujemy lewą stronę dowodzonej nierówności korzystając z nierówności $x,y\geqslant3$:

$$|f(x)-f(y)|=\left|\frac{1}{x^3}-\frac{1}{y^3}\right|=\left|\frac{y^3-x^3}{x^3y^3}\right|=\frac{|x-y|\cdot(x^2+xy+y^2)}{x^3y^3}=$$

$$=|x-y|\cdot\left(\frac{x^2}{x^3y^3}+\frac{xy}{x^3y^3}+\frac{y^2}{x^3y^3}\right)=|x-y|\cdot\left(\frac{1}{xy^3}+\frac{1}{x^2y^2}+\frac{1}{x^3y}\right)\leqslant$$

$$\leqslant|x-y|\cdot\left(\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^4}\right)=|x-y|\cdot\frac{3}{3^4}=|x-y|\cdot\frac{1}{3^3}=\frac{|x-y|}{27}\leqslant\frac{|x-y|}{25}\,,$$

co kończy dowód danej w treści zadania nierówności dla dowolnych $x,y\geqslant3$.

Zadanie **14. (10 punktów)**

Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1} = 6\,.$$

Wskazówka: Poszukać szeregu geometrycznego.

Rozwiązanie:

Spróbujemy znaleźć szereg geometryczny o żądanych własnościach.

W tym celu załóżmy, że $a_n = cq^{n-1}$, pamiętając, aby $c > 0$ oraz $0 < q < 1$. Wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} cq^{n-1} = \frac{c}{1-q}$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} c^2 q \left(q^2\right)^{n-1} = \frac{c^2 q}{1-q^2}\,,$$

co po uwzględnieniu warunków zadania oraz prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} \dfrac{c}{1-q} = 6 \\ \dfrac{c^2 q}{1-q^2} = 6\,, \end{cases}$$

czyli

$$\begin{cases} c = 6(1-q) \\ c^2 q = 6(1-q^2)\,. \end{cases}$$

Dzieląc drugie równanie przez pierwsze otrzymujemy

$$cq = 1+q\,,$$

co po podstawieniu do pierwszego równania przemnożonego przez q daje kolejno

$$1+q = 6q - 6q^2\,,$$

$$6q^2 - 5q + 1 = 0\,,$$

$$q = \frac{5 \pm 1}{12}\,,$$

skąd

$$q = 1/3, \qquad c = 4$$

lub

$$q = 1/2, \qquad c = 3\,.$$

Otrzymane rozwiązania prowadzą odpowiednio do

$$a_n = cq^{n-1} = \frac{4}{3^{n-1}} \quad \text{oraz} \quad a_n = cq^{n-1} = \frac{3}{2^{n-1}}\,.$$

Odpowiedź: Przykładem szeregu spełniającego warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^{n-1}}\,.$$

KOLOKWIUM nr **9**, **3.01.2017**, godz. 9:15–10:00 **MORWY**

Zadanie **13.** **(10 punktów)**

Niech funkcja $f:[2,\infty)\to\mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x)=\frac{1}{x^3}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x,y\in[2,\infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{5}\,.$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy i szacujemy lewą stronę dowodzonej nierówności korzystając z nierówności $x,y\geqslant 2$:

$$|f(x)-f(y)|=\left|\frac{1}{x^3}-\frac{1}{y^3}\right|=\left|\frac{y^3-x^3}{x^3y^3}\right|=\frac{|x-y|\cdot(x^2+xy+y^2)}{x^3y^3}=$$

$$=|x-y|\cdot\left(\frac{x^2}{x^3y^3}+\frac{xy}{x^3y^3}+\frac{y^2}{x^3y^3}\right)=|x-y|\cdot\left(\frac{1}{xy^3}+\frac{1}{x^2y^2}+\frac{1}{x^3y}\right)\leqslant$$

$$\leqslant|x-y|\cdot\left(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^4}\right)=|x-y|\cdot\frac{3}{2^4}=|x-y|\cdot\frac{3}{16}\leqslant|x-y|\cdot\frac{3}{15}=\frac{|x-y|}{5}\,,$$

co kończy dowód danej w treści zadania nierówności dla dowolnych $x,y\geqslant 2$.

Zadanie **14. (10 punktów)**

Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1} = \frac{15}{2}\,.$$

Wskazówka: Poszukać szeregu geometrycznego.

Rozwiązanie:

Spróbujemy znaleźć szereg geometryczny o żądanych własnościach.

W tym celu załóżmy, że $a_n = cq^{n-1}$, pamiętając, aby $c>0$ oraz $0<q<1$. Wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} cq^{n-1} = \frac{c}{1-q}$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} c^2 q \left(q^2\right)^{n-1} = \frac{c^2 q}{1-q^2}\,,$$

co po uwzględnieniu warunków zadania oraz prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} \dfrac{c}{1-q} = 15/2 \\ \dfrac{c^2 q}{1-q^2} = 15/2\,, \end{cases}$$

czyli

$$\begin{cases} c = 15(1-q)/2 \\ c^2 q = 15(1-q^2)/2\,. \end{cases}$$

Dzieląc drugie równanie przez pierwsze otrzymujemy

$$cq = 1+q\,,$$

co po podstawieniu do pierwszego równania przemnożonego przez q daje kolejno

$$1+q = 15q/2 - 15q^2/2\,,$$

$$2+2q = 15q - 15q^2\,,$$

$$15q^2 - 13q + 2 = 0\,,$$

$$q = \frac{13 \pm 7}{30}\,,$$

skąd

$$q = 2/3, \qquad c = 5/2$$

lub

$$q = 1/5, \qquad c = 6\,.$$

Otrzymane rozwiązania prowadzą odpowiednio do

$$a_n = cq^{n-1} = \frac{5\cdot 2^{n-2}}{3^{n-1}} \quad \text{oraz} \quad a_n = cq^{n-1} = \frac{6}{5^{n-1}}\,.$$

Odpowiedź: Przykładem szeregu spełniającego warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{5^{n-1}}\,.$$