Kolokwium nr 1: poniedziałek 17.10.2016, godz. 12:15-13:00, materiał zad. 1–29.

1. Indukcja matematyczna. Dwumian Newtona.

Poziom standardowy (z myślą o ocenie co najwyżej dobrej)

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 10,12.10.2016 (grupy 2–5).

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami.

1. Wskazać taką liczbę C, że dla dowolnej liczby całkowitych nieujemnych n i k, gdzie $n\geqslant k+2$, prawdziwa jest równość

$$\binom{n}{k}+C\cdot\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k+2}=\binom{n+2}{k+2}.$$

2. Uporządkować rosnąco następujące liczby:

$$\binom{100}{7},\ \binom{100}{27},\ \binom{100}{47},\ \binom{100}{57},\ \binom{100}{77},\ \binom{100}{97}.$$

3. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$1+2\cdot 3+3\cdot 3^2+4\cdot 3^3+5\cdot 3^4+\ldots+n\cdot 3^{n-1}=\frac{2n-1}{4}\cdot 3^n+\frac{1}{4}\,.$$

4. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n\geqslant 2$ zachodzi równość

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}=1-\frac{1}{n}\,.$$

Oznaczenia:

$$\sum_{i=m}^{n}a_i=a_m+a_{m+1}+a_{m+2}+a_{m+3}+\ldots+a_{n-1}+a_n$$

$$\prod_{i=m}^{n}a_i=a_m\cdot a_{m+1}\cdot a_{m+2}\cdot a_{m+3}\cdot\ldots\cdot a_{n-1}\cdot a_n$$

Obliczyć wartości wyrażeń:

5. $\sum\limits_{i=3}^{5}i^2$ **6.** $\sum\limits_{i=-99}^{100}i^3$ **7.** $\sum\limits_{i=-10}^{10}7$ **8.** $\prod\limits_{i=1}^{5}i$ **9.** $\prod\limits_{i=-2015}^{2015}i^{2015}$

10. Czy równość $2\cdot\binom{n}{k}=\binom{n}{k+1}$ jest prawdziwa dla

a) $n=8,\ \ k=2$ **b)** $n=10,\ \ k=3$ **c)** $n=15,\ \ k=4$ **d)** $n=17,\ \ k=5$

11. Czy prawdziwa jest równość

a) $\prod\limits_{n=2}^{15}n=15!$ **b)** $\prod\limits_{n=5}^{24}n=23!$ **c)** $\prod\limits_{n=-1}^{37}n=-37!$ **d)** $\sum\limits_{n=-28}^{29}n=29$

12. Dowieść, że dla dowolnych liczb całkowitych nieujemnych a,b,c zachodzi równość

$$\binom{a+b+c}{a}\binom{b+c}{b}=\binom{a+b+c}{b}\binom{a+c}{a}\,.$$

13. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ zachodzi równość
$$\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{60}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2n(n+1)}\;.$$

14. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ zachodzi równość
$$\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\ldots+\frac{1}{n^2-1}=\frac{(n-1)(3n+2)}{4n(n+1)}\;.$$

15. Dowieść, że dla każdego $n \geqslant 2$ zachodzi równość
$$\binom{2}{2}\cdot\binom{3}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\ldots\cdot\binom{n}{2}=\frac{n\cdot[(n-1)!]^2}{2^{n-1}}\;.$$

16. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość
$$(2^{2^0}+1)\cdot(2^{2^1}+1)\cdot(2^{2^2}+1)\cdot(2^{2^3}+1)\cdot(2^{2^4}+1)\cdot\ldots\cdot(2^{2^n}+1)=2^{2^{n+1}}-1\;.$$
UWAGA: Potęgowanie wykonujemy "od góry": $a^{b^c}=a^{(b^c)}$.

17. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość
$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=(1+2+3+\ldots+n)^2\;.$$

18. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ zachodzi nierówność $\binom{2n}{n}<4^n$.
Wskazówka: $(1+1)^{2n}$

19. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ zachodzi nierówność $\binom{2n}{n}<2^{2n-1}$.

20. Dowieść, że dla każdego $n \geqslant 2$ zachodzi równość
$$\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\ldots+\binom{n}{2}=\binom{n+1}{3}\;.$$

21. Liczby a_n,b_n są określone wzorami $a_1=b_1=1$, $a_{n+1}=a_n+b_n$, $b_{n+1}=a_{n+1}+a_n$. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi równość $b_n^2-2a_n^2=(-1)^n$.

22. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność
$$16^n\cdot\binom{4n}{2n}<27^n\cdot\binom{4n}{n}\;.$$

OSZUSTWO **23.** Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność
$$30n<2^n+110\,. \qquad (*)$$
Rozwiązanie:
Przeprowadzimy dowód indukcyjny.
1° Dla $n=1$ sprawdzamy bezpośrednio $30<2+110=112$.
2° Załóżmy, że $30n<2^n+110$. Udowodnimy nierówność $30(n+1)<2^{n+1}+110$. Stosując założenie indukcyjne otrzymujemy ciąg nierówności:
$$30(n+1)=30n+30<2^n+110+30=2^{n+1}+110+30-2^n<2^{n+1}+110,$$
przy czym ostatnia nierówność zachodzi dla $n\geqslant 5$.

Zatem nierówność $(*)$ została udowodniona dla $n \geqslant 5$.
Pozostaje sprawdzić, że
dla $n=2$ mamy $60<4+110=114$,
dla $n=3$ mamy $90<8+110=118$,
dla $n=4$ mamy $120<16+110=126$.
Tym samym nierówność $(*)$ jest udowodniona dla wszystkich liczb naturalnych n.
W szczególności wykazaliśmy, że dla $n=6$ zachodzi nierówność
$180<174$.
Gdzie tkwi błąd w powyższym rozumowaniu?

24. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $10n<2^n+25$.

25. Wyznaczyć zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x, dla których prawdziwa jest podana implikacja:
a) $x>0 \Rightarrow x+1>2$ **b)** $x<1 \Rightarrow x^2>0$ **c)** $x<1 \Rightarrow x^2<0$ **d)** $x^5>32 \Rightarrow x^6>64$
e) $x^6>64 \Rightarrow x^7>128$ **f)** $x^5<32 \Rightarrow x^6<64$ **g)** $x^6<64 \Rightarrow x^7<128$

26. O zdaniu[1] $T(n)$ wiadomo, że $T(7)$ jest fałszywe, $T(17)$ jest prawdziwe, a ponadto dla każdej liczby naturalnej n zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+1)$. Czy stąd wynika, że
a) $T(5)$ jest fałszywe **b)** $T(10)$ jest prawdziwe
c) $T(15)$ jest fałszywe **d)** $T(20)$ jest prawdziwe

27. Niech $T(n)$ oznacza zdanie: Suma cyfr liczby n jest większa od 10. Czy prawdziwa jest implikacja
a) $T(27) \Rightarrow T(39)$ **b)** $T(99) \Rightarrow T(100)$ **c)** $T(63) \Rightarrow T(71)$ **d)** $T(29) \Rightarrow T(57)$

28. O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że prawdziwe jest $T(1)$, a ponadto dla każdej liczby naturalnej n implikacja $T(2n-1) \Rightarrow T(2n)$ **jest fałszywa**. Czy stąd wynika, że

a) $T(5)$ jest prawdziwe ....

b) $T(6)$ jest prawdziwe ....

c) $T(7)$ jest fałszywe ....

d) $T(8)$ jest fałszywe ....

29. O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że prawdziwe jest $T(1)$, a ponadto dla każdej liczby naturalnej n implikacja $T(3n-1) \Rightarrow T(3n)$ **jest fałszywa**. Czy stąd wynika, że

a) $T(7)$ jest prawdziwe ....

b) $T(8)$ jest prawdziwe ....

c) $T(9)$ jest fałszywe ....

d) $T(10)$ jest fałszywe ....

[1] Zamiast słowa *zdanie* poprawniej jest użyć w tym kontekście określenia *formuła zdaniowa*, ale może to być nieco odstraszające.