Kolokwium nr 2: poniedziałek 24.10.2016, godz. 12:15-13:00, materiał zad. 1–48.
Kolokwium nr 3: poniedziałek 7.11.2016, godz. 12:15-13:00, materiał zad. 1–99.
Kolokwium nr 4: poniedziałek 14.11.2016, godz. 12:15-13:00, materiał zad. 1–115.

2. Liczby rzeczywiste, liczby wymierne i niewymierne.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 17,19.10.2016 (grupy 2–5).

30. Przedstawić liczbę 0,123(45) w postaci nieskracalnego ułamka zwykłego.

31. Przedstawić liczbę 0,1(270) w postaci nieskracalnego ułamka zwykłego.

Obliczyć podając wynik w postaci nieskracalnego ułamka zwykłego
32. $\sqrt{0,(4)}+\sqrt[3]{3{,}374(9)}$ **33.** $(0{,}2(9)+1{,}(09))\cdot 12{,}(2)$ **34.** $(0{,}(037))^{0,(3)}$

35. Zapisać ułamek zwykły w postaci ułamka dziesiętnego skończonego lub okresowego
a) $\frac{1}{6}$ **b)** $\frac{1}{8}$ **c)** $\frac{1}{9}$ **d)** $\frac{1}{11}$

36. Dowieść, że liczba $\sqrt{15}$ jest niewymierna.

37. Czy istnieją takie liczby naturalne $m,n>1$, że $\log_m n=13/7$?

38. Dowieść, że liczba $\sqrt{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$ jest niewymierna.

39. Niech n będzie liczbą naturalną. Mając do dyspozycji nawiasy, n, liczby całkowite oraz znaki $+,-,\cdot,:$ i $\sqrt{}$ zapisać liczbę niewymierną dodatnią mniejszą od $\frac{1}{n}$.

OSZUSTWO **40.**
ZADANIE: Dowieść, że liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$ jest niewymierna.
Rozwiązanie I:

Liczba $-\sqrt{2}$ jest niewymierna. Także liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}$ jest niewymierna, bo gdyby była wymierna, to jej kwadrat $3-\sqrt{8}$ też byłby liczbą wymierną, a nie jest. Zatem liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$ jest niewymierna jako suma liczb niewymiernych.

Rozwiązanie II:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$ jest wymierna i oznaczmy ją przez w. Wtedy

$$w=\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$$

$$w+\sqrt{2}=\sqrt{3-\sqrt{8}}$$

$$w^2+2\sqrt{2}w+2=3-2\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{2}(w+1)+(w-1)(w+1)=0$$

Dzieląc ostatnią równość przez $w+1$ otrzymujemy

$$2\sqrt{2}+w-1=0,$$

co stanowi sprzeczność z założeniem wymierności liczby w, gdyż lewa strona równości jest liczbą niewymierną i nie może być równa 0.

Czy powyższe rozwiązania są poprawne?

41. Dowieść, że liczba $\log_{12}18$ jest niewymierna.

42. Dowieść, że liczba $\log_{20}50$ jest niewymierna.

43. Rozstrzygnąć, czy liczba $\log_2 3+\log_4 5$ jest wymierna, czy niewymierna.

44. Liczby a i b są dodatnie i niewymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczba $a+b$ jest niewymierna?

45. Liczby $a+b$, $b+c$ i $c+a$ są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby a, b, c są wymierne?

46. Liczby $a+b$, $b+c$ i $c+a$ są niewymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczba $a+b+c$ jest niewymierna?

47. Liczby $a+b$, $b+c$, $c+d$ i $d+a$ są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby a, b, c, d są wymierne?

48. Dla liczby wymiernej dodatniej $q=m/n$, gdzie $m,n\in\mathbb{N}$, zapisać warunek $\log_2 3<q$ używając tylko liczb m, n, działań na liczbach całkowitych, znaków nierówności i ewentualnie symboli logicznych. Wykorzystać ten warunek do porównania $\log_2 3$ z liczbami $3/2$, $5/3$ oraz $8/5$. Nie używać kalkulatora. Wolno wykonywać bezpośrednie obliczenia na liczbach całkowitych dodatnich mniejszych od 300.

3. Szacowanie liczb i wyrażeń.

Zadania do samodzielnego rozwiązania.

49. Niech $a=\sqrt[4]{2}$. Która z liczb jest większa:

$$a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{16}}}}}}}}}}}}}}}} \qquad \text{czy} \qquad 10^{10^{10}}\ ?$$

Pomoc dla osób dostających oczopląsu: liczba a występuje w pierwszym wyrażeniu 16 razy.

Która z liczb jest większa ?

50. $123456\cdot 123458$ czy 123457^2 **51.** $1000!$ czy $(500!)^2$ **52.** $\binom{2007}{666}^{2007}$ czy $\binom{2007}{666}^{666}$

53. $\left(\sqrt[4]{83}-2\right)^{2007}$ czy $\left(\sqrt[4]{83}-2\right)^{666}$ **54.** $\left(\sqrt[4]{79}-2\right)^{2007}$ czy $\left(\sqrt[4]{79}-2\right)^{666}$

55. $\left(\sqrt[4]{79}-3\right)^{2007}$ czy $\left(\sqrt[4]{79}-3\right)^{666}$ **56.** $\left(\sqrt[4]{79}-3\right)^{2007}$ czy $\left(\sqrt[4]{79}-3\right)^{667}$

57. 2^{1000} czy 3^{700} **58.** 5^{444} czy 3^{700} **59.** $\frac{17}{20}$ czy $\frac{16}{21}$ **60.** $\frac{100}{7}$ czy $\frac{150}{11}$

61. $\frac{8^{444}}{17^{17}}$ czy $\frac{16^{333}}{19^{17}}$ **62.** $\frac{17^{667}}{3333^4+6666^4}$ czy $\frac{17^{666}}{3333^4}$ **63.** $\binom{2007}{666}$ czy $\binom{2007}{667}$

64. $\binom{2007}{666}$ czy $\binom{2008}{666}$ **65.** $\binom{2007}{1666}$ czy $\binom{2007}{1667}$ **66.** $\binom{2007}{1666}$ czy $\binom{2008}{1666}$

67. $\frac{1}{\sqrt{37}-6}$ czy $\sqrt{37}+6$ **68.** $\frac{1}{\sqrt{37}-6}$ czy 12 **69.** $\frac{1}{\sqrt{37}-6}$ czy $\frac{1}{\sqrt{97}-10}$

70. $\left(\frac{9}{4}\right)^{27/8}$ czy $\left(\frac{27}{8}\right)^{9/4}$

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 24,26.10.2016 (grupy 2–5).

71. Uporządkować następujące liczby w kolejności rosnącej

$$a=\left(5-\sqrt{37}\right)^{2008}, \quad b=\left(6-\sqrt{37}\right)^{2009}, \quad c=\left(7-\sqrt{73}\right)^{2011}, \quad d=\left(9-\sqrt{73}\right)^{2013}.$$

Która z liczb jest większa:

72. $2^{1000!}$ czy $999^{999!}$? **73.** 26^{99} czy 10^{151} ? **74.** 26^{99} czy 123^{65} ?

75. $\sqrt{37}-6$ czy $\frac{1}{10}$? **76.** $\left(\sqrt{37}-6\right)^{666}$ czy $\frac{1}{100^{100}}$? **77.** $2^{2^{2^{1001}}}$ czy $1000^{2^{2^{1000}}}$?

Wskazując odpowiednią liczbę naturalną k udowodnić nierówności $10^k < L < 10^{2k}$.

78. $L=3972^{257}$ **79.** $L=257^{3972}$ **80.** $L=700!$

81. Niech $a=\sqrt[16]{2}$. Która z liczb jest większa: a^{256} czy 256^a ?

W każdym z poniższych zadań wpisz w miejscu kropek dwie liczby występujące w ciągu 0, 1, 2, 5 ,10, 100, 10^5, 10^{10}, 10^{20}, 10^{50}, 10^{100}, 10^{200}, 10^{500}, 10^{1000}, 10^{2000}, 10^{5000}, 10^{10000}, 10^{20000}, 10^{50000}, 10^{100000}, 10^{200000}, 10^{500000}, $10^{1000000}$ na **kolejnych** miejscach tak, aby powstały prawdziwe nierówności.

82. .... $< 2^{500} <$ ....

83. .... $< 3^{2000} <$ ....

84. .... $< 2^{10000} <$ ....

85. .... $< 30^{10000} <$ ....

86. .... $< 2^{2^{10}} <$ ....

87. .... $< 4444^{4444} <$ ....

88. .... $< 7777^{7777} <$ ....

89. .... $< 2011^{2011} <$ ....

90. .... $< 222^{5555} <$ ....

91. .... $< 5555^{222} <$ ....

92. .... $< 333^{333} <$ ....

93. .... $< 10000! <$ ....

94. .... $< 666! <$ ....

95. Udowodnić nierówność $n^{2^{27}} \leqslant 2^n$ dla wybranej przez siebie liczby naturalnej $n>1$.

96. Wskazując odpowiednie liczby wymierne dodatnie C, D (niezależne od n) udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \leqslant \frac{4n^4-3n^3+2}{5n^4+4n^2-2} \leqslant D\,.$$

Wskazując odpowiednie liczby wymierne dodatnie C, D oraz liczbę rzeczywistą k udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C\cdot n^k < W(n) < D\cdot n^k\,.$$

97. $W(n)=\dfrac{n^3+2n^2+1}{\sqrt{n^6+2}+2}$ **98.** $W(n)=\dfrac{2n^3-n^2+1}{\sqrt[3]{n^2+1}+1}$ **99.** $W(n)=\dfrac{\sqrt[5]{n^2+1}}{\sqrt[7]{n^3+1}+1}$

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 7,9.11.2016 (grupy 2–5).

Dla podanej liczby x wskazać taką liczbę całkowitą n, że $n<x<n+1$.

100. $x=\dfrac{1}{5\sqrt{2}-7}$ **101.** $x=\dfrac{1}{4\sqrt{3}-7}$ **102.** $x=\dfrac{1}{3\sqrt{3}-5}$

103. $x=\dfrac{1}{3\sqrt{3}-4\sqrt{2}}$ **104.** $x=\dfrac{1}{3\sqrt{5}-7}$ **105.** $x=\dfrac{1}{2\sqrt{13}-7}$

106. Dobrać odpowiednie liczby wymierne dodatnie C oraz D i udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \leqslant \frac{6n^{11}-3n^6+2}{6n^{11}-3n^5+3} \leqslant D\,.$$

Liczby C i D muszą spełniać nierówność $D \leqslant 8C$.

107. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leqslant \sqrt[3]{n^3+63n^2}-n \leqslant 7C\,.$$

108. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leqslant \sqrt[4]{n^4+80n^3}-n \leqslant 10C\,.$$

Dla podanego wyrażenia $W(n)$ dobrać odpowiednie stałe g oraz C i udowodnić, że nierówności $g-C/n<W(n)<g+C/n$ są prawdziwe dla każdej liczby naturalnej n.

109. $\dfrac{n^5+n^4+1}{2n^5+n^3+5}$ **110.** $\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$ **111.** $\dfrac{\sqrt{4n^4+1}}{n^2+1}$ **112.** $\sqrt{n^2+4n}-n$

Dla podanego wyrażenia $W(n,k)$ dobrać odpowiednią wartość parametru k i odpowiednie stałe dodatnie g oraz C i udowodnić, że nierówności $g-C/n<W(n,k)<g+C/n$ są prawdziwe dla każdej liczby naturalnej n.

113. $\dfrac{\sqrt{n^k+1}}{n^6+n^5}$ **114.** $\dfrac{\sqrt{n^6+n^5}}{n^k+1}$ **115.** $\sqrt{n^8+n^k}-n^4$