Kolokwium nr 5: poniedziałek 21.11.2016, godz. 12:15-13:00, materiał zad. 1–140.
Kolokwium nr 6: poniedziałek 28.11.2016, godz. 12:15-13:00, materiał zad. 1–150.
Kolokwium nr 7: **WTOREK** 6.12.2016, godz. 9:15-10:00, materiał zad. 1–293.

4. Ciągi liczbowe.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 14,16.11.2016 (grupy 2–5).

Zbadać zbieżność ciągu (a_n) określonego podanym wzorem; obliczyć granicę, jeśli ciąg jest zbieżny. Wolno skorzystać ze wzoru $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, gdy $|q| < 1$.

116. $\dfrac{n}{n+7}$ **117.** $\dfrac{5n^3+n^2-6}{3n^4+7}$ **118.** $\dfrac{5n^4+n^2-6}{3n^4+7}$ **119.** $\dfrac{5n^5+n^2-6}{3n^4+7}$ **120.** $\dfrac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+2}$

121. $\dfrac{1-2+3-4+5-6+...-2n}{\sqrt{n^2+2}}$ **122.** $\dfrac{n}{1+\sqrt{n}}$ **123.** $n\cdot(-1)^n$

124. $\dfrac{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)^7}{n^3\left(1+7\sqrt{n+2}\right)}$ **125.** $\dfrac{1+2+3+...+n}{n^2}$ **126.** $\dfrac{3^0+3^1+3^2+3^3+...+3^n}{3^n}$

127. $\dfrac{\sqrt{3^n+2^n}}{\sqrt{3^n+1}}$ **128.** $\sqrt{n^2+3n}-n$ **129.** $n\left(\sqrt{n^2+7}-n\right)$

130. $\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+7}-\sqrt{n}}$ **131.** $\dfrac{\sqrt{n^4+1}-n^2}{\left(\sqrt{n^4+n}-n^2\right)^2}$ **132.** $\dfrac{7n+(\sqrt[3]{n}\sqrt[6]{n})^5\sqrt{9n+1}}{11n^3+7n+3}$

133. $\dfrac{1}{(2+(-1)^n)^n}$ **134.** $a_n=\begin{cases}(-1)^n\cdot n! \text{ dla } n\leqslant 100\\ \frac{2^n}{2^n+1} \text{ dla } n>100\end{cases}$ **135.** $\sqrt[n^2]{n}$ **136.** $\sqrt[n]{n^2}$

137. $n^3\cdot\sqrt{n^2+1}-n^4-\dfrac{n^2}{2}$ **138.** $\dfrac{\sqrt{8n^2+1}}{\sqrt{2n^4+1}}+\dfrac{\sqrt{8n^2+2}}{\sqrt{2n^4+2}}+\dfrac{\sqrt{8n^2+3}}{\sqrt{2n^4+3}}+\ldots+\dfrac{\sqrt{8n^2+3n}}{\sqrt{2n^4+3n}}$

139. Wskazać liczbę naturalną k, dla której granica

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2\cdot\sqrt[6]{n^k+1}}{n^2+5\cdot\sqrt[3]{n^7+7}+7\cdot\sqrt{n^5+5}}$$

istnieje i jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Obliczyć wartość granicy przy tak wybranej liczbie k.

140. Wskazać liczbę naturalną k, dla której granica

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^{14}+9n^9+1}-n^7}{n^k}$$

istnieje i jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Obliczyć wartość granicy przy tak wybranej liczbie k.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 21,23.11.2016 (grupy 2–5).

141. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^4-n^2+1}{5n^5-n^3+1}+\frac{3n^4-2n^2+4}{5n^5-2n^3+8}+\frac{3n^4-3n^2+9}{5n^5-3n^3+27}+\ldots\right.$$

$$\ldots+\frac{3n^4-kn^2+k^2}{5n^5-kn^3+k^3}+\ldots+\frac{3n^4-2n^3+4n^2}{5n^5-2n^4+8n^3}\Bigg).$$

142. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n^3+3}{\sqrt{n^{10}+3}}+\frac{5n^3+6}{\sqrt{n^{10}+6}}+\frac{5n^3+9}{\sqrt{n^{10}+9}}+\frac{5n^3+12}{\sqrt{n^{10}+12}}+\ldots+\frac{5n^3+6n^2}{\sqrt{n^{10}+6n^2}}\right).$$

143. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2+1}{n^3+\sqrt{n^6+1}}+\frac{4n^2+2}{n^3+\sqrt{n^6+2}}+\frac{4n^2+3}{n^3+\sqrt{n^6+3}}+\frac{4n^2+4}{n^3+\sqrt{n^6+4}}+\ldots+\frac{4n^2+6n}{n^3+\sqrt{n^6+6n}}\right).$$

144. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^3}+\frac{n}{n^3+1}+\frac{n}{n^3+2}+\frac{n}{n^3+3}+\frac{n}{n^3+4}+\frac{n}{n^3+5}+\frac{n}{n^3+6}+\ldots+\frac{n}{(n+1)^3}\right).$$

145. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{k\cdot n^k+1}}{n^7+1}+\frac{\sqrt{k\cdot n^k+2}}{n^7+4}+\frac{\sqrt{k\cdot n^k+3}}{n^7+9}+\frac{\sqrt{k\cdot n^k+4}}{n^7+16}+\ldots+\frac{\sqrt{k\cdot n^k+n^3}}{n^7+n^6}\right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej dodatniej parametru k, aby powyższa granica była dodatnia i skończona.

Zadania sprawdzające do samodzielnego rozwiązania.

W miarę wolnego czasu mogą być omówione na ćwiczeniach.

146. Wskazać liczbę rzeczywistą k, dla której granica

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\left(\sqrt{n^{666}+1}-n^{333}\right)\right)$$

istnieje i jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Obliczyć wartość granicy przy tak wybranej liczbie k.

147. Wskazać liczbę rzeczywistą k, dla której granica

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\left(\sqrt[4]{n^{888}+1}-n^{222}\right)\right)$$

istnieje i jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Obliczyć wartość granicy przy tak wybranej liczbie k.

148. Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k+1}}{n^{13}+1}+\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k+2}}{n^{13}+4}+\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k+3}}{n^{13}+9}+\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k+4}}{n^{13}+16}+\ldots+\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k+n^4}}{n^{13}+n^8}\right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej dodatniej parametru k, aby powyższa granica była dodatnia i skończona.

149. Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^3+1}}{\sqrt{49n^7-1}}+\frac{\sqrt{n^3+2}}{\sqrt{49n^7+1}}+\frac{\sqrt{n^3+3}}{\sqrt{49n^7-1}}+\ldots+\frac{\sqrt{n^3+k}}{\sqrt{49n^7+(-1)^k}}+\ldots+\frac{\sqrt{(n+1)^3}}{\sqrt{49n^7-1}}\right).$$

150. Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{\sqrt{n^6+1}}+\frac{n^2+1}{\sqrt{(n^2+1)^3+1}}+\frac{n^2+2}{\sqrt{(n^2+2)^3+1}}+\frac{n^2+3}{\sqrt{(n^2+3)^3+1}}+\frac{n^2+4}{\sqrt{(n^2+4)^3+1}}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{n^2+k}{\sqrt{(n^2+k)^3+1}}+\ldots+\frac{(n+3)^2}{\sqrt{(n+3)^6+1}}\right).$$

5. Kresy zbiorów.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 28,30.11.2016 (grupy 2–5).

W każdym z poniższych zadań podaj kresy zbioru Z oraz określ, czy kresy należą do zbioru Z.

Nie wszystkie zadania będą omówione szczegółowo na ćwiczeniach – studenci powinni umieć wskazać zadania, które sprawiły największą trudność.

151. $Z=\left\{\frac{1}{n^2-7} : n\in\mathbb{N}\right\}$

152. $Z=\left\{x^n : x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{5}\right)\wedge n\in\mathbb{N}\right\}$

153. $Z=\left\{\sqrt{n^2+3}-n : n\in\mathbb{N}\right\}$

154. $Z=\left\{\log_2(2n-1)-\log_2 n : n\in\mathbb{N}\right\}$

155. $Z=\left\{\frac{n}{3n+7} : n\in\mathbb{N}\right\}$

156. $Z=\left\{\frac{n}{3n-7} : n\in\mathbb{N}\right\}$

157. $Z=\left\{\frac{(\log_2(n^2+1))\cdot\log_3(n^2+4)}{(\log_8(n^2+4))\cdot\log_9(n^2+1)} :\ n\in\mathbb{N}\right\}$

158. $Z=\left\{\sqrt{x^2+2x+1} : -5\leqslant x<3\right\}$

159. $Z=\left\{\frac{1}{x^2+2} : x\in\mathbb{R}\right\}$

160. $Z=\left\{\frac{x^2+1}{x^2+2} : x\in\mathbb{R}\right\}$

161. $Z=\left\{x^2+4x+4 : x\in(-6,1)\right\}$

162. $Z=\left\{x^2+4y+4 : x,y\in(-6,1)\right\}$

163. $Z=\left\{\frac{2n^2+3n+5}{2n^2+3n+4} : n\in\mathbb{N}\right\}$

164. $Z=\left\{\frac{2n^2+3n+5}{2n^2+3n+6} : n\in\mathbb{N}\right\}$

165. $Z=\left\{x^2 : x\in(-3,2)\right\}$

166. $Z=\left\{x^3 : x\in(-3,2)\right\}$

167. $Z=\left\{\frac{1}{5n-13} : n\in\mathbb{N}\right\}$

168. $Z=\left\{\frac{\sqrt[n]{2}}{n} : n\in\mathbb{N}\right\}$

169. $Z=\left\{n^2-5n : n\in\mathbb{N}\right\}$

170. $Z=\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n : n\in\mathbb{N}\right\}$

171. $Z=\left\{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{m+2} : m,n\in\mathbb{N}\right\}$

172. $Z=\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N} \wedge 2m^2<3n^2\right\}$

173. $Z=\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N} \wedge 2^m>3^n\right\}$

174. $Z=\left\{7n+\frac{n!+n^{2009}+1}{n!+n^{2009}+4} : n\in\mathbb{N}\right\}$

175. $Z=\left\{x^2 : x\in(-4,9)\right\}$

176. $Z=\left\{\frac{n}{2n+3} : n\in\mathbb{N}\right\}$

177. $Z=\left\{\binom{2008}{n} : n\in\mathbb{N}\wedge n\leqslant 2008\right\}$

178. $Z=\left\{\frac{n}{n+m} : m,n\in\mathbb{N}\right\}$

179. $Z=\left\{\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{3}\right)^2 : n\in\mathbb{N}\right\}$

180. $Z=\left\{\sqrt{n^2+2n}-n : n\in\mathbb{N}\right\}$

181. $Z=\left\{\sqrt[n]{3}-\sqrt[m]{2} : m,n\in\mathbb{N}\right\}$

182. $Z=\left\{\frac{7}{n}-3m : m,n\in\mathbb{N}\right\}$

183. $Z=\left\{\left(\sqrt{37}-5\right)^n : n\in\mathbb{N}\right\}$

184. $Z=\left\{\left(\sqrt{37}-6\right)^n : n\in\mathbb{N}\right\}$

185. $Z=\left\{\left(\sqrt{37}-7\right)^n : n\in\mathbb{N}\right\}$

186. $Z=\left\{\left(\sqrt{37}-8\right)^n : n\in\mathbb{N}\right\}$

187. $Z=\left\{\frac{5m-2n}{mn} : m,n\in\mathbb{N}\right\}$

188. $Z=\left\{\frac{m}{n+7} : m,n\in\mathbb{N}\right\}$

189. $Z=\left\{x^2 : x\in(-2,1)\right\}$

190. $Z=\left\{x^3 : x\in(-2,1)\right\}$

191. $Z=\left\{3x^2+y^3 : x,y\in(-2,1)\right\}$

192. $Z=\left\{\sqrt{n^2+n}-n : n\in\mathbb{N}\right\}$

193. $Z=\left\{\sqrt{n^2+n+1}-n : n\in\mathbb{N}\right\}$

194. $Z=\{|2-\log_2 x| : x\in(1,8]\}$

195. $Z=\{|2-\log_2 x| : x\in(1,16]\}$

196. $Z=\{|2-\log_2 x| : x\in(1,32]\}$

197. $Z=\left\{\frac{1}{3n-2}+\frac{1}{2m-3} : m,n\in\mathbb{N}\right\}$

198. $Z=\{\log_2(n+7)-\log_2 n : n\in\mathbb{N}\}$

199. $Z=\left\{\frac{m+n}{\sqrt{mn}} : m,n\in\mathbb{N}\right\}$

200. $Z=\left\{\frac{(-1)^n}{n^2+1} : n\in\mathbb{N}\right\}$

201. $Z=\left\{\frac{1}{n^2-22} : n\in\mathbb{N}\right\}$

202. $Z=\left\{\frac{2n+1}{3n+1} : n\in\mathbb{N}\right\}$

203. $Z=\left\{\frac{2n+1}{3n+2} : n\in\mathbb{N}\right\}$

204. $Z=\{x-2y : x,y\in\mathbb{R}\ \wedge\ 16<x\leqslant 28\ \wedge\ 3<y\leqslant 4\}$

205. $Z=\{|x-y| : x,y\in\mathbb{R}\ \wedge\ 16<x\leqslant 28\ \wedge\ 3<y\leqslant 4\}$

206. $Z=\left\{\frac{1}{7n-30} : n\in\mathbb{N}\right\}$

207. $Z=\left\{\frac{1}{(7n-30)^2}:\ n\in\mathbb{N}\right\}$

208. $Z=\left\{\frac{1}{(7n-30)^3}:\ n\in\mathbb{N}\right\}$

209. $Z=\left\{\frac{1}{7m-30}+\frac{1}{(7n-30)^2}:\ m,n\in\mathbb{N}\right\}$

210. $Z=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 5^3\cdot n^{15}\leqslant m^{15}\leqslant 3^5\cdot n^{15}\right\}$

211. $Z=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 5^2\cdot n^{10}\leqslant m^{10}\leqslant 2^5\cdot n^{10}\right\}$

212. $Z=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 3^2\cdot n^{6}\leqslant m^{6}\leqslant 2^3\cdot n^{6}\right\}$

Zadania sprawdzające do samodzielnego rozwiązania.

Zadania wskazane przez studentów będą omówione na konwersatorium 29 listopada 2016.

W każdym z poniższych zadań podaj kresy zbioru oraz określ, czy kresy należą do zbioru.

213. $A=\left\{\frac{1}{n+2}: n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf A=$ .... $\sup A=$ ....

214. $B=\left\{\frac{2n+5}{n+2}: n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf B=$ .... $\sup B=$ ....

215. $C=\left\{\frac{2n+3}{n+2}: n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf C=$ .... $\sup C=$ ....

216. $D=\left\{\frac{m+n}{mn}: m,n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf D=$ .... $\sup D=$ ....

217. $E=\left\{\frac{8m-3n}{mn}: m,n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf E=$ .... $\sup E=$ ....

218. $F=\left\{\frac{m+2n+3}{mn}: m,n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf F=$ .... $\sup F=$ ....

219. $G=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 25n^2\leqslant m^2\leqslant 27n^2\right\}$ $\inf G=$ .... $\sup G=$ ....

220. $H=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 25n^3\leqslant m^3\leqslant 27n^3\right\}$ $\inf H=$ .... $\sup H=$ ....

221. $I=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 25^n\leqslant 3^m\leqslant 27^n\right\}$ $\inf I=$ .... $\sup I=$ ....

222. $J=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 25^n\leqslant 5^m\leqslant 27^n\right\}$ $\inf J=$ .... $\sup J=$ ....

223. $A=\left\{x^2: x\in(-3,1)\right\}$ $\inf A=$ .... $\sup A=$ ....

224. $B=\left\{x^3: x\in(-3,1)\right\}$ $\inf B=$ .... $\sup B=$ ....

225. $C=\left\{x^4:\, x\in(-3,1)\right\}$ $\inf C=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\sup C=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

226. $D=\left\{x^2-2x+1:\, x\in(-1,4)\right\}$ $\inf D=\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\sup D=\ldots\ldots\ldots\ldots$

227. $E=\left\{x^2-4x+4:\, x\in(-1,4)\right\}$ $\inf E=\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\sup E=\ldots\ldots\ldots\ldots$

228. $F=\left\{x^2-6x+9:\, x\in(-1,4)\right\}$ $\inf F=\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\sup F=\ldots\ldots\ldots\ldots$

229. $G=\left\{x^2-2x:\, x\in(-1,4)\right\}$ $\inf G=\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\sup G=\ldots\ldots\ldots\ldots$

230. $H=\left\{x^2-4x:\, x\in(-1,4)\right\}$ $\inf H=\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\sup H=\ldots\ldots\ldots\ldots$

231. $I=\left\{x^2-6x:\, x\in(-1,4)\right\}$ $\inf I=\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\sup I=\ldots\ldots\ldots\ldots$

232. $A=\left\{\frac{m}{n}:\, m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 16n^2\leqslant m^2\leqslant 64n^2\right\}$ $\inf A=\ldots\ldots\ldots$ $\sup A=\ldots\ldots\ldots$

233. $B=\left\{\frac{m}{n}:\, m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 16n^3\leqslant m^3\leqslant 64n^3\right\}$ $\inf B=\ldots\ldots\ldots$ $\sup B=\ldots\ldots\ldots$

234. $C=\left\{\frac{m}{n}:\, m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 16n^4\leqslant m^4\leqslant 64n^4\right\}$ $\inf C=\ldots\ldots\ldots$ $\sup C=\ldots\ldots\ldots$

235. $D=\left\{\sqrt{n^4+n^2}-n^2:\, n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf D=\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\sup D=\ldots\ldots\ldots\ldots$

236. $E=\left\{\sqrt[4]{n^4+n^3}-n:\, n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf E=\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\sup E=\ldots\ldots\ldots\ldots$

237. $F=\left\{(\log_2 x)^2:\, x\in\left(\frac{1}{8},2\right)\right\}$ $\inf F=\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\sup F=\ldots\ldots\ldots\ldots$

238. $G=\left\{(\log_3 x)^3:\, x\in\left(\frac{1}{9},3\right)\right\}$ $\inf G=\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\sup G=\ldots\ldots\ldots\ldots$

239. $H=\left\{(\log_4 x)^4:\, x\in\left(\frac{1}{16},4\right)\right\}$ $\inf H=\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\sup H=\ldots\ldots\ldots\ldots$

240. $I=\left\{\log_x 8:\, x\in\left(0,\frac{1}{2}\right]\right\}$ $\inf I=\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\sup I=\ldots\ldots\ldots\ldots$

241. $J=\left\{\log_x 8:\, x\in\left[\sqrt{2},+\infty\right)\right\}$ $\inf J=\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\sup J=\ldots\ldots\ldots\ldots$

242. $K=\{\log_x 8:\, x\in(1,4]\}$ $\inf K=\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\sup K=\ldots\ldots\ldots\ldots$

243. $L=\left\{\log_x 8:\, x\in\left[\frac{1}{16},1\right)\right\}$ $\inf L=\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\sup L=\ldots\ldots\ldots\ldots$

244. $A=\left\{(x-2)^2:\, x\in(0,3)\right\}$ $\inf A=\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\sup A=\ldots\ldots\ldots\ldots$

245. $B=\left\{(x-2)^3:\, x\in(0,3)\right\}$ $\inf B=\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\sup B=\ldots\ldots\ldots\ldots$

246. $C=\left\{(x-2)^4:\, x\in(0,3)\right\}$ $\inf C=\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\sup C=\ldots\ldots\ldots\ldots$

247. $D=\left\{(x-2)^5:\, x\in(0,3)\right\}$ $\inf D=\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\sup D=\ldots\ldots\ldots\ldots$

248. $E=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N} \wedge 4n^2\leqslant 8m^2\leqslant 16n^2\right\}$ $\inf E=$ .... $\sup E=$ ....

249. $F=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N} \wedge 4n^2\leqslant 9m^2\leqslant 16n^2\right\}$ $\inf F=$ .... $\sup F=$ ....

250. $G=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N} \wedge 25n^2\leqslant 9m^2\leqslant 27n^2\right\}$ $\inf G=$ .... $\sup G=$ ....

251. $H=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N} \wedge 4^n\leqslant 8^m\leqslant 16^n\right\}$ $\inf H=$ .... $\sup H=$ ....

252. $I=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N} \wedge 4^n\leqslant 9^m\leqslant 16^n\right\}$ $\inf I=$ .... $\sup I=$ ....

253. $J=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N} \wedge 25^n\leqslant 9^m\leqslant 27^n\right\}$ $\inf J=$ .... $\sup J=$ ....

254. $A=\left\{\frac{1}{3^n-10}: n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf A=$ .... $\sup A=$ ....

255. $B=\left\{\frac{1}{3^n-20}: n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf B=$ .... $\sup B=$ ....

256. $C=\left\{\frac{1}{3^n-26}: n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf C=$ .... $\sup C=$ ....

257. $D=\left\{\frac{1}{5^n-26}: n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf D=$ .... $\sup D=$ ....

258. $E=\left\{\left(\sqrt{26}-4\right)^n: n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf E=$ .... $\sup E=$ ....

259. $F=\left\{\left(\sqrt{26}-5\right)^n: n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf F=$ .... $\sup F=$ ....

260. $G=\left\{\left(\sqrt{26}-6\right)^n: n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf G=$ .... $\sup G=$ ....

261. $H=\left\{2^{x^2}: x\in(-2,1)\right\}$ $\inf H=$ .... $\sup H=$ ....

262. $I=\left\{2^{x^3}: x\in(-2,1)\right\}$ $\inf I=$ .... $\sup I=$ ....

263. $J=\left\{2^{x^4}: x\in(-2,1)\right\}$ $\inf J=$ .... $\sup J=$ ....

Niech $\mathbb{T}$ będzie zbiorem wszystkich ciągów (a_n) spełniających warunek

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} |a_n-1|<\frac{1}{n}\,.$$

W każdym z dziesięciu poniższych zadań podaj odpowiedni kres zbioru.

264. $\sup\{a_1: (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

265. $\inf\{a_1: (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

266. $\sup\{a_2: (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

267. $\inf\{a_2: (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

268. $\sup\{a_2-a_3: (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

269. $\inf\{a_2-a_3: (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

270. $\sup\{a_3-a_6: (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

271. $\inf\{a_3-a_6: (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

272. $\sup\{a_2+a_3+a_6: (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

273. $\inf\{a_2+a_3+a_6: (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

Niech $\mathbb{T}$ będzie zbiorem wszystkich ciągów (a_n) spełniających warunek

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\left|a_n-\frac{1}{n}\right|<\frac{1}{n}\,.$$

W każdym z dziesięciu poniższych zadań podaj odpowiedni kres zbioru.

274. $\sup\{a_1: (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

275. $\inf\{a_1: (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

276. $\sup\{a_2: (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

277. $\inf\{a_2: (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

278. $\sup\{a_2-a_3: (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

279. $\inf\{a_2-a_3: (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

280. $\sup\{a_3-a_6: (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

281. $\inf\{a_3-a_6: (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

282. $\sup\{a_2+a_3+a_6: (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

283. $\inf\{a_2+a_3+a_6: (a_n)\in\mathbb{T}\}=$ ....

6. Szeregi liczbowe – podstawy

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 5.12.2016 (grupy 2–5).

284. Obliczyć $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{7^k}$, a następnie znaleźć $\lim_{n\to\infty}S_n$.

285. Obliczyć sumę szeregu

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(-6)^n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8^n}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{8^n}$

Wskazówka: W kolejnych pięciu zadaniach szukać przykładu szeregu geometrycznego.

286. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 .$$

287. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} = 2 .$$

288. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że dla dowolnej liczby naturalnej k zachodzi równość

$$a_k = 2 \cdot \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n .$$

289. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{1}{4} .$$

290. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{1}{2} \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4 = \frac{1}{5} .$$

291. Dowieść, że $6 < \sum_{n=1}^{2047} \frac{1}{n} < 11$.

292. Dowieść, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$ jest zbieżny, a jego suma jest mniejsza od 2.

Zadanie sprawdzające do samodzielnego rozwiązania.

293. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 6 .$$

Wskazówka: Poszukać szeregu geometrycznego.