146. Wskazać liczbę rzeczywistą k, dla której granica
$$\lim_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\left(\sqrt{n^{666}+1}-n^{333}\right)\right)$$
istnieje i jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Obliczyć wartość granicy przy tak wybranej liczbie k.

Rozwiązanie:

Korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów w postaci $a-b=\dfrac{a^2-b^2}{a+b}$ przekształcamy daną w treści zadania granicę w następujący sposób:
$$\lim_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\left(\sqrt{n^{666}+1}-n^{333}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\frac{1}{\sqrt{n^{666}+1}+n^{333}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{\sqrt{n^{666}+1}+n^{333}}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{n^{333}\cdot\left(\sqrt{1+n^{-666}}+1\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{k-333}}{\sqrt{1+n^{-666}}+1}\,.$$

Mianownik ostatniego wyrażenia pod znakiem granicy dąży do 2 przy n dążącym do nieskończoności, natomiast licznik jest równy 1, gdy $k=333$. Dla $k=333$ mamy więc
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{k-333}}{\sqrt{1+n^{-666}}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+n^{-666}}+1}=\frac{1}{2}\,.$$

Odpowiedź: Dla $k=333$ dana w zadaniu granica ma wartość $1/2$.

147. Wskazać liczbę rzeczywistą k, dla której granica
$$\lim_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\left(\sqrt[4]{n^{888}+1}-n^{222}\right)\right)$$
istnieje i jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Obliczyć wartość granicy przy tak wybranej liczbie k.

Rozwiązanie:

Korzystając ze wzoru na różnicę czwartych potęg w postaci
$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}=\frac{a^4-b^4}{(a+b)\cdot(a^2+b^2)}$$
przekształcamy daną w treści zadania granicę w następujący sposób:
$$\lim_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\left(\sqrt[4]{n^{888}+1}-n^{222}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\frac{1}{\left(\sqrt[4]{n^{888}+1}+n^{222}\right)\cdot\left(\sqrt{n^{888}+1}+n^{444}\right)}\right)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{\left(\sqrt[4]{n^{888}+1}+n^{222}\right)\cdot\left(\sqrt{n^{888}+1}+n^{444}\right)}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{n^{666}\cdot\left(\sqrt[4]{1+n^{-888}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+n^{-888}}+1\right)}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{k-666}}{\left(\sqrt[4]{1+n^{-888}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+n^{-888}}+1\right)}\,.$$

Mianownik ostatniego wyrażenia pod znakiem granicy dąży do 4 przy n dążącym do nieskończoności, natomiast licznik jest równy 1, gdy $k=666$. Dla $k=666$ mamy więc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{k-666}}{\left(\sqrt[4]{1+n^{-888}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+n^{-888}}+1\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\sqrt[4]{1+n^{-888}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+n^{-888}}+1\right)} = \frac{1}{4}\,.$$

Odpowiedź: Dla $k=666$ dana w zadaniu granica ma wartość $1/4$.

148. Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k+1}}{n^{13}+1}+\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k+2}}{n^{13}+4}+\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k+3}}{n^{13}+9}+\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k+4}}{n^{13}+16}+\ldots+\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k+n^4}}{n^{13}+n^8}\right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej dodatniej parametru k, aby powyższa granica była dodatnia i skończona.

Rozwiązanie:

Zauważamy, że dana w zadaniu suma ma n^4 wyrazów. Szacujemy ją obustronnie:

$$n^4\cdot\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k+0}}{n^{13}+n^8}\leqslant\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k+1}}{n^{13}+1}+\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k+2}}{n^{13}+4}+\ldots+\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k+n^4}}{n^{13}+n^8}\leqslant n^4\cdot\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k+n^4}}{n^{13}+0}\,,$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego przy $n\to+\infty$.

$$n^4\cdot\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k+0}}{n^{13}+n^8}=\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k}}{n^9+n^4}=\frac{\sqrt[3]{k}\cdot n^{k/3}}{n^9+n^4}=\frac{\sqrt[3]{k}\cdot n^{k/3-9}}{1+\frac{1}{n^5}}\to\sqrt[3]{k}\,,$$

o ile $k/3-9=0$, czyli $k=27$.

$$n^4\cdot\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k+n^4}}{n^{13}}=\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k+n^4}}{n^9}=\sqrt[3]{k\cdot n^{k-27}+\frac{1}{n^{23}}}\to\sqrt[3]{k}\,,$$

o ile $k-27=0$, czyli $k=27$.

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że dla $k=27$ granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 3.

149. Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^3+1}}{\sqrt{49n^7-1}}+\frac{\sqrt{n^3+2}}{\sqrt{49n^7+1}}+\frac{\sqrt{n^3+3}}{\sqrt{49n^7-1}}+\ldots+\frac{\sqrt{n^3+k}}{\sqrt{49n^7+(-1)^k}}+\ldots+\frac{\sqrt{(n+1)^3}}{\sqrt{49n^7-1}}\right).$$

Rozwiązanie:

Zauważamy, że ostatni składnik danej w zadaniu sumy można zapisać jako

$$\frac{\sqrt{n^3+3n^2+3n+1}}{\sqrt{49n^7-1}}\,,$$

skąd wynika, że ma ona $3n^2+3n+1$ składników.

Oznaczymy sumę występującą w treści zadania przez b_n i oszacujemy ją od góry przez wspólne oszacowanie składników (liczniki od góry, mianowniki od dołu) przemnożone przez liczbę składników. Oznaczymy uzyskane oszacowanie przez c_n.

$$b_n\leqslant\left(3n^2+3n+1\right)\cdot\frac{\sqrt{(n+1)^3}}{\sqrt{49n^7-1}}=c_n\,.$$

Postępując analogicznie oszacujemy daną sumę od dołu przez wspólne oszacowanie składników (liczniki od dołu, mianowniki od góry) przemnożone przez liczbę składników. Oznaczymy uzyskane oszacowanie przez a_n.

$$b_n \geqslant \left(3n^2+3n+1\right)\cdot\frac{\sqrt{n^3+1}}{\sqrt{49n^7+1}} = a_n\,.$$

Obliczając granice ciągów (a_n) i (c_n) otrzymujemy:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(3n^2+3n+1\right)\cdot\frac{\sqrt{n^3+1}}{\sqrt{49n^7+1}} = \lim_{n\to\infty}\left(3+3n^{-1}+n^{-2}\right)\cdot\frac{\sqrt{1+n^{-3}}}{\sqrt{49+n^{-7}}} = \frac{3}{7}$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}\left(3n^2+3n+1\right)\cdot\frac{\sqrt{(n+1)^3}}{\sqrt{49n^7-1}} = \lim_{n\to\infty}\left(3+3n^{-1}+n^{-2}\right)\cdot\frac{\sqrt{(1+n^{-1})^3}}{\sqrt{49-n^{-7}}} = \frac{3}{7}\,.$$

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n\,,$$

a ponadto

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \frac{3}{7}$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{7}\,,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{3}{7}\,.$$

Odpowiedź: Wartość granicy podanej w treści zadania jest równa 3/7.

150. Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{\sqrt{n^6+1}}+\frac{n^2+1}{\sqrt{(n^2+1)^3+1}}+\frac{n^2+2}{\sqrt{(n^2+2)^3+1}}+\frac{n^2+3}{\sqrt{(n^2+3)^3+1}}+\frac{n^2+4}{\sqrt{(n^2+4)^3+1}}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{n^2+k}{\sqrt{(n^2+k)^3+1}}+\ldots+\frac{(n+3)^2}{\sqrt{(n+3)^6+1}}\right).$$

Rozwiązanie:

Zauważamy, że dana w zadaniu suma ma $(n+3)^3-n^2+1=6n+10$ wyrazów. Szacujemy ją obustronnie:

$$(6n+10)\cdot\frac{n^2}{\sqrt{(n+3)^6+1}} \leqslant \sum_{k=0}^{6n+9}\frac{n^2+k}{\sqrt{(n^2+k)^3+1}} \leqslant (6n+10)\cdot\frac{(n+3)^2}{\sqrt{n^6+1}}\,,$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego przy $n\to+\infty$.

Otrzymujemy

$$(6n+10)\cdot\frac{n^2}{\sqrt{(n+3)^6+1}} = \left(6+\frac{10}{n}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{3}{n}\right)^6+\frac{1}{n^6}}} \to 6$$

oraz

$$(6n+10)\cdot\frac{(n+3)^2}{\sqrt{n^6+1}}=\left(6+\frac{10}{n}\right)\cdot\frac{\left(1+\frac{3}{n}\right)^2}{\sqrt{1+\frac{1}{n^6}}}\to 6\,.$$

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 6.

W każdym z poniższych zadań podaj kresy zbioru oraz określ, czy kresy należą do zbioru.

213. $A=\left\{\frac{1}{n+2}:n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf A=\mathbf{0}$ (**NIE**) $\sup A=\mathbf{1/3}$ (**TAK**)

214. $B=\left\{\frac{2n+5}{n+2}:n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf B=\mathbf{2}$ (**NIE**) $\sup B=\mathbf{7/3}$ (**TAK**)

215. $C=\left\{\frac{2n+3}{n+2}:n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf C=\mathbf{5/3}$ (**TAK**) $\sup C=\mathbf{2}$ (**NIE**)

216. $D=\left\{\frac{m+n}{mn}:m,n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf D=\mathbf{0}$ (**NIE**) $\sup D=\mathbf{2}$ (**TAK**)

217. $E=\left\{\frac{8m-3n}{mn}:m,n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf E=\mathbf{-3}$ (**NIE**) $\sup E=\mathbf{8}$ (**NIE**)

218. $F=\left\{\frac{m+2n+3}{mn}:m,n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf F=\mathbf{0}$ (**NIE**) $\sup F=\mathbf{6}$ (**TAK**)

219. $G=\left\{\frac{m}{n}:m,n\in\mathbb{N}\ \land\ 25n^2\leqslant m^2\leqslant 27n^2\right\}$
$\inf G=\mathbf{5}$ (**TAK**) $\sup G=\mathbf{3\cdot\sqrt{3}}=\mathbf{\sqrt{27}}$ (**NIE**)

220. $H=\left\{\frac{m}{n}:m,n\in\mathbb{N}\ \land\ 25n^3\leqslant m^3\leqslant 27n^3\right\}$
$\inf H=\mathbf{\sqrt[3]{25}}$ (**NIE**) $\sup H=\mathbf{3}$ (**TAK**)

221. $I=\left\{\frac{m}{n}:m,n\in\mathbb{N}\ \land\ 25^n\leqslant 3^m\leqslant 27^n\right\}$
$\inf I=\mathbf{\log_3 25}=\mathbf{2\cdot\log_3 5}$ (**NIE**) $\sup I=\mathbf{3}$ (**TAK**)

222. $J=\left\{\frac{m}{n}:m,n\in\mathbb{N}\ \land\ 25^n\leqslant 5^m\leqslant 27^n\right\}$
$\inf J=\mathbf{2}$ (**TAK**) $\sup J=\mathbf{\log_5 27}=\mathbf{3\cdot\log_5 3}$ (**NIE**)

223. $A=\left\{x^2:x\in(-3,1)\right\}$ $\inf A=\mathbf{0}$ (**TAK**) $\sup A=\mathbf{9}$ (**NIE**)

224. $B=\left\{x^3:x\in(-3,1)\right\}$ $\inf B=\mathbf{-27}$ (**NIE**) $\sup B=\mathbf{1}$ (**NIE**)

225. $C=\left\{x^4:x\in(-3,1)\right\}$ $\inf C=\mathbf{0}$ (**TAK**) $\sup C=\mathbf{81}$ (**NIE**)

226. $D=\left\{x^2-2x+1:x\in(-1,4)\right\}$ $\inf D=\mathbf{0}$ (**TAK**) $\sup D=\mathbf{9}$ (**NIE**)

227. $E=\left\{x^2-4x+4:\ x\in(-1,4)\right\}$ $\inf E=\mathbf{0}$ (**TAK**) $\sup E=\mathbf{9}$ (**NIE**)

228. $F=\left\{x^2-6x+9:\ x\in(-1,4)\right\}$ $\inf F=\mathbf{0}$ (**TAK**) $\sup F=\mathbf{16}$ (**NIE**)

229. $G=\left\{x^2-2x:\ x\in(-1,4)\right\}$ $\inf G=\mathbf{-1}$ (**TAK**) $\sup G=\mathbf{8}$ (**NIE**)

230. $H=\left\{x^2-4x:\ x\in(-1,4)\right\}$ $\inf H=\mathbf{-4}$ (**TAK**) $\sup H=\mathbf{5}$ (**NIE**)

231. $I=\left\{x^2-6x:\ x\in(-1,4)\right\}$ $\inf I=\mathbf{-9}$ (**TAK**) $\sup I=\mathbf{7}$ (**NIE**)

232. $A=\left\{\frac{m}{n}:\ m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 16n^2\leqslant m^2\leqslant 64n^2\right\}$ $\inf A=\mathbf{4}$ (**TAK**) $\sup A=\mathbf{8}$ (**TAK**)

233. $B=\left\{\frac{m}{n}:\ m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 16n^3\leqslant m^3\leqslant 64n^3\right\}$
$\inf B=\mathbf{2\cdot\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{16}}$ (**NIE**) $\sup B=\mathbf{4}$ (**TAK**)

234. $C=\left\{\frac{m}{n}:\ m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 16n^4\leqslant m^4\leqslant 64n^4\right\}$
$\inf C=\mathbf{2}$ (**TAK**) $\sup C=\mathbf{2\cdot\sqrt{2}=\sqrt{8}}$ (**NIE**)

235. $D=\left\{\sqrt{n^4+n^2}-n^2:\ n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf D=\mathbf{\sqrt{2}-1}$ (**TAK**) $\sup D=\mathbf{1/2}$ (**NIE**)

236. $E=\left\{\sqrt[4]{n^4+n^3}-n:\ n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf E=\mathbf{\sqrt[4]{2}-1}$ (**TAK**) $\sup E=\mathbf{1/4}$ (**NIE**)

237. $F=\left\{(\log_2 x)^2:\ x\in\left(\frac{1}{8},2\right)\right\}$ $\inf F=\mathbf{0}$ (**TAK**) $\sup F=\mathbf{9}$ (**NIE**)

238. $G=\left\{(\log_3 x)^3:\ x\in\left(\frac{1}{9},3\right)\right\}$ $\inf G=\mathbf{-8}$ (**NIE**) $\sup G=\mathbf{1}$ (**NIE**)

239. $H=\left\{(\log_4 x)^4:\ x\in\left(\frac{1}{16},4\right)\right\}$ $\inf H=\mathbf{0}$ (**TAK**) $\sup H=\mathbf{16}$ (**NIE**)

240. $I=\left\{\log_x 8:\ x\in\left(0,\frac{1}{2}\right]\right\}$ $\inf I=\mathbf{-3}$ (**TAK**) $\sup I=\mathbf{0}$ (**NIE**)

241. $J=\left\{\log_x 8:\ x\in\left[\sqrt{2},+\infty\right)\right\}$ $\inf J=\mathbf{0}$ (**NIE**) $\sup J=\mathbf{6}$ (**TAK**)

242. $K=\{\log_x 8:\ x\in(1,4]\}$ $\inf K=\mathbf{3/2}$ (**TAK**) $\sup K=\mathbf{+\infty}$ (**NIE**)

243. $L=\left\{\log_x 8:\ x\in\left[\frac{1}{16},1\right)\right\}$ $\inf L=\mathbf{-\infty}$ (**NIE**) $\sup L=\mathbf{-3/4}$ (**TAK**)

244. $A=\left\{(x-2)^2:\ x\in(0,3)\right\}$ $\inf A=\mathbf{0}$ (**TAK**) $\sup A=\mathbf{4}$ (**NIE**)

245. $B=\left\{(x-2)^3:\ x\in(0,3)\right\}$ $\inf B=\mathbf{-8}$ (**NIE**) $\sup B=\mathbf{1}$ (**NIE**)

246. $C=\left\{(x-2)^4:\ x\in(0,3)\right\}$ $\inf C=\mathbf{0}$ (**TAK**) $\sup C=\mathbf{16}$ (**NIE**)

247. $D=\left\{(x-2)^5 : x\in(0,3)\right\}$ $\inf D=\mathbf{-32}$ (**NIE**) $\sup D=\mathbf{1}$ (**NIE**)

248. $E=\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N} \wedge 4n^2\leqslant 8m^2\leqslant 16n^2\right\}$
$\inf E=\mathbf{1/\sqrt{2}=\sqrt{2}/2}$ (**NIE**) $\sup E=\mathbf{\sqrt{2}}$ (**NIE**)

249. $F=\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N} \wedge 4n^2\leqslant 9m^2\leqslant 16n^2\right\}$
$\inf F=\mathbf{2/3}$ (**TAK**) $\sup F=\mathbf{4/3}$ (**TAK**)

250. $G=\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N} \wedge 25n^2\leqslant 9m^2\leqslant 27n^2\right\}$
$\inf G=\mathbf{5/3}$ (**TAK**) $\sup G=\mathbf{\sqrt{3}}$ (**NIE**)

251. $H=\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N} \wedge 4^n\leqslant 8^m\leqslant 16^n\right\}$
$\inf H=\mathbf{2/3}$ (**TAK**) $\sup H=\mathbf{4/3}$ (**TAK**)

252. $I=\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N} \wedge 4^n\leqslant 9^m\leqslant 16^n\right\}$
$\inf I=\mathbf{\log_3 2=\log_9 4}$ (**NIE**) $\sup I=\mathbf{\log_3 4=\log_9 16}$ (**NIE**)

253. $J=\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N} \wedge 25^n\leqslant 9^m\leqslant 27^n\right\}$
$\inf J=\mathbf{\log_3 5=\log_9 25}$ (**NIE**) $\sup J=\mathbf{3/2}$ (**TAK**)

254. $A=\left\{\frac{1}{3^n-10} : n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf A=\mathbf{-1}$ (**TAK**) $\sup A=\mathbf{1/17}$ (**TAK**)

255. $B=\left\{\frac{1}{3^n-20} : n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf B=\mathbf{-1/11}$ (**TAK**) $\sup B=\mathbf{1/7}$ (**TAK**)

256. $C=\left\{\frac{1}{3^n-26} : n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf C=\mathbf{-1/17}$ (**TAK**) $\sup C=\mathbf{1}$ (**TAK**)

257. $D=\left\{\frac{1}{5^n-26} : n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf D=\mathbf{-1}$ (**TAK**) $\sup D=\mathbf{1/99}$ (**TAK**)

258. $E=\left\{\left(\sqrt{26}-4\right)^n : n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf E=\mathbf{\sqrt{26}-4}$ (**TAK**) $\sup E=\mathbf{+\infty}$ (**NIE**)

259. $F=\left\{\left(\sqrt{26}-5\right)^n : n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf F=\mathbf{0}$ (**NIE**) $\sup F=\mathbf{\sqrt{26}-5}$ (**TAK**)

260. $G=\left\{\left(\sqrt{26}-6\right)^n : n\in\mathbb{N}\right\}$
$\inf G=\mathbf{\sqrt{26}-6}$ (**TAK**) $\sup G=\mathbf{\left(\sqrt{26}-6\right)^2}$ (**TAK**)

261. $H=\left\{2^{x^2} : x\in(-2,1)\right\}$ $\inf H=\mathbf{1}$ (**TAK**) $\sup H=\mathbf{16}$ (**NIE**)

262. $I=\left\{2^{x^3} : x\in(-2,1)\right\}$ $\inf I=\mathbf{1/256}$ (**NIE**) $\sup I=\mathbf{2}$ (**NIE**)

263. $J=\left\{2^{x^4} : x\in(-2,1)\right\}$ $\inf J=\mathbf{1}$ (**TAK**) $\sup J=\mathbf{2^{16}}$ (**NIE**)

Niech $\mathbb{T}$ będzie zbiorem wszystkich ciągów (a_n) spełniających warunek

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} |a_n - 1| < \frac{1}{n}.$$

W każdym z dziesięciu poniższych zadań podaj odpowiedni kres zbioru.

264. $\sup\{a_1 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \mathbf{2}$

265. $\inf\{a_1 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \mathbf{0}$

266. $\sup\{a_2 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \mathbf{3/2}$

267. $\inf\{a_2 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \mathbf{1/2}$

268. $\sup\{a_2 - a_3 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \mathbf{5/6}$

269. $\inf\{a_2 - a_3 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \mathbf{-5/6}$

270. $\sup\{a_3 - a_6 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \mathbf{1/2}$

271. $\inf\{a_3 - a_6 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \mathbf{-1/2}$

272. $\sup\{a_2 + a_3 + a_6 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \mathbf{4}$

273. $\inf\{a_2 + a_3 + a_6 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \mathbf{2}$

Niech $\mathbb{T}$ będzie zbiorem wszystkich ciągów (a_n) spełniających warunek

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \left|a_n - \frac{1}{n}\right| < \frac{1}{n}.$$

W każdym z dziesięciu poniższych zadań podaj odpowiedni kres zbioru.

274. $\sup\{a_1 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \mathbf{2}$

275. $\inf\{a_1 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \mathbf{0}$

276. $\sup\{a_2 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \mathbf{1}$

277. $\inf\{a_2 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \mathbf{0}$

278. $\sup\{a_2 - a_3 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \mathbf{1}$

279. $\inf\{a_2 - a_3 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \mathbf{-2/3}$

280. $\sup\{a_3 - a_6 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \mathbf{2/3}$

281. $\inf\{a_3 - a_6 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \mathbf{-1/3}$

282. $\sup\{a_2 + a_3 + a_6 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \mathbf{2}$

283. $\inf\{a_2 + a_3 + a_6 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \mathbf{0}$

293. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 6\,.$$

Wskazówka: Poszukać szeregu geometrycznego.

Rozwiązanie:

Spróbujemy znaleźć szereg geometryczny o żądanych własnościach.

W tym celu załóżmy, że $a_n = cq^{n-1}$, pamiętając, aby $c > 0$ oraz $0 < q < 1$. Wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} cq^{n-1} = \frac{c}{1-q}$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c^2 \left(q^2\right)^{n-1} = \frac{c^2}{1-q^2}\,,$$

co po uwzględnieniu warunków zadania oraz prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} \dfrac{c}{1-q} = 6 \\ \dfrac{c^2}{1-q^2} = 6\,, \end{cases} \tag{$\spadesuit$}$$

czyli

$$\begin{cases} c = 6(1-q) \\ c^2 = 6(1-q^2)\,. \end{cases}$$

Dzieląc drugie równanie przez pierwsze otrzymujemy

$$c = 1+q\,,$$

co po podstawieniu do pierwszego równania daje kolejno

$$1+q = 6-6q\,,$$

$$7q = 5\,,$$

$$q = \frac{5}{7}\,,$$

skąd

$$c = 1+q = 1+\frac{5}{7} = \frac{12}{7}\,.$$

Otrzymane rozwiązanie $q = 5/7$, $c = 12/7$ prowadzi do

$$a_n = cq^{n-1} = \frac{12 \cdot 5^{n-1}}{7^n}\,.$$

Odpowiedź: Przykładem szeregu spełniającego warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12 \cdot 5^{n-1}}{7^n}\,.$$