Kolokwium nr 8: wtorek 13.12.2016, godz. 9:15-10:00, materiał zad. 1–331.

7. Funkcje i ich własności. Ciągłość.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 7,12.12.2016 (grupy 2–5).

Wyznaczyć dziedzinę funkcji f, gdzie $f(x)$ jest dane wzorem

294. $\log_2\log_2 x$ **295.** $\log_2\log_2\log_2 x$ **296.** $\log_2\log_2\log_3 x$ **297.** $\log_2\log_3\log_2 x$

298. $\log_3\log_2\log_2 x$ **299.** $\log_3\log_2\log_2 |x|$ **300.** $\log_3\log_2 \Big|\log_2|x|\Big|$

301. $\log_3\Big|\log_2\Big|\log_2|x|\Big|\Big|$ **302.** $\log_2 \sin x$ **303.** $\sqrt{2\sin x+1}$ **304.** $\sqrt{x^{2014}-x^{2013}}$

305. $\sqrt{x^{2014}+x^{2013}}$ **306.** $\sqrt{x^{2014}-x^{2012}}$ **307.** $\sqrt{x^{2013}-x^{2012}}$ **308.** $\sqrt{x^{2013}+x^{2012}}$

309. $\sqrt{x^{2013}-x^{2011}}$ **310.** $\log_{(x^2-1)}(x^2-4)$ **311.** $\log_{(x^2-4)}(x^2-1)$

312. Wskazać odpowiednie liczby wymierne dodatnie C oraz δ, a następnie udowodnić, że

$$\forall_{x\in(27-\delta,\,27+\delta)} \left|\sqrt[3]{x}-C\right| < \frac{1}{1000}\,.$$

Do podanych f, x_0 i ε dobrać takie δ, aby $\forall_{x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)} |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

313. $f(x)=2x$, $x_0=5$, $\varepsilon=1/10$ **314.** $f(x)=1/x$, $x_0=4$, $\varepsilon=1/100$

315. $f(x)=x^2$, $x_0=1$, $\varepsilon=1/50$ **316.** $f(x)=x^3$, $x_0=0$, $\varepsilon=1/1000$

317. $f(x)=\sqrt{x}$, $x_0=30$, $\varepsilon=1/10$ **318.** $f(x)=x^4$, $x_0=10$, $\varepsilon=10^{-10}$

Dla podanej funkcji f dobrać C i udowodnić oszacowanie

$$|f(x)-f(x_0)|<C\cdot\delta$$

prawdziwe dla dowolnego $\delta>0$ oraz dowolnych $x, x_0\in D_f$ spełniających warunek $|x-x_0|<\delta$.

319. $f(x)=\sqrt{x}$, $D_f=[1,+\infty)$ **320.** $f(x)=\sqrt{x^2+1}$, $D_f=\mathbb{R}$

321. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$, $D_f=\mathbb{R}$ **322.** $f(x)=x^3$, $D_f=[-10,5]$

Do podanych f, x_0 i ε dobrać takie $k\in\mathbb{N}$ (dowolne, nie musi być najmniejsze), aby przy $\delta=10^{-k}$ spełniony był warunek $\forall_{x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)} |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

323. $f(x)=x^{10}$, $x_0=2$, $\varepsilon=1/10$ **324.** $f(x)=x^{100}$, $x_0=5$, $\varepsilon=10^{-10}$

325. $f(x)=x^{1000}$, $x_0=10$, $\varepsilon=10^{100}$ (tak, do **plus** setnej)

326. $f(x)=x^{1/10}$, $x_0=1111$, $\varepsilon=10^{-5}$

Zadania sprawdzające do samodzielnego rozwiązania.

W miarę wolnego czasu mogą być omówione na ćwiczeniach.

327. Niech funkcja $f:[25,\infty)\to\mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x)=\sqrt{x}$.

Zdanie Z: Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y\in[25,\infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant C\cdot|x-y|\,.$$

a) Dowieść, że **zdanie Z** jest prawdziwe dla $C=1/10$.

b) Dowieść, że **zdanie Z** jest fałszywe dla $C=1/12$.

328. Dla funkcji $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ określonej podanym wzorem wskazać odpowiednie liczby rzeczywiste dodatnie x, y i udowodnić nierówność $|f(x)-f(y)|>100\cdot|x-y|$.

a) $f(x)=x^2$

b) $f(x)=\dfrac{1}{x}$

329. Niech funkcja $f:[4,\infty)\to\mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.
Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x,y\in[4,\infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{16}\,.$$

330. W każdym z zadań **330.1-330.10** podaj dziedzinę funkcji f określonej podanym wzorem.

330.1. $f(x)=\sqrt{(x-64)\cdot(x^2-64)}$ $D_f=$ ....

330.2. $f(x)=\sqrt{(x^2-64)\cdot(x^3-64)}$ $D_f=$ ....

330.3. $f(x)=\sqrt{(x^3-64)\cdot(x^6-64)}$ $D_f=$ ....

330.4. $f(x)=\sqrt{(x^6-64)\cdot(2^x-64)}$ $D_f=$ ....

330.5. $f(x)=\sqrt{(2^x-64)\cdot(x-64)}$ $D_f=$ ....

330.6. $f(x)=\sqrt{(x-64)^2\cdot(x^3-64)}$ $D_f=$ ....

330.7. $f(x)=\sqrt{(x^2-64)^2\cdot(x^6-64)}$ $D_f=$ ....

330.8. $f(x)=\sqrt{(x^3-64)^2\cdot(2^x-64)}$ $D_f=$ ....

330.9. $f(x)=\sqrt{(x^6-64)^2\cdot(x-64)}$ $D_f=$ ....

330.10. $f(x)=\sqrt{(2^x-64)^2\cdot(x^2-64)}$ $D_f=$ ....

331. W każdym z zadań **331.1-331.10** dla podanej liczby a podaj taką liczbę b, że funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=a|x|+bx$$

spełnia dla każdej liczby rzeczywistej x równość $f(f(x))=x$, czyli jest odwrotna do samej siebie.

331.1. $a=1$, $b=$ ....

331.2. $a=-1$, $b=$ ....

331.3. $a=2$, $b=$ ....

331.4. $a=-2$, $b=$ ....

331.5. $a=3$, $b=$ ....

331.6. $a=-3$, $b=$ ....

331.7. $a=3/4$, $b=$ ....

331.8. $a=-3/4$, $b=$ ....

331.9. $a=4/3$, $b=$ ....

331.10. $a=-4/3$, $b=$ ....