327. Niech funkcja $f:[25,\infty)\to\mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x)=\sqrt{x}$.
Zdanie Z: Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x,y\in[25,\infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant C\cdot|x-y|\,.$$

a) Dowieść, że **zdanie Z** jest prawdziwe dla $C=1/10$.
Rozwiązanie:
Przekształcamy i szacujemy lewą stronę dowodzonej nierówności korzystając z nierówności $x,y\geqslant 25$:

$$|f(x)-f(y)|=\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right|=\frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\leqslant\frac{|x-y|}{\sqrt{25}+\sqrt{25}}=\frac{|x-y|}{5+5}=\frac{|x-y|}{10}\,,$$

co stanowi dowód danej w treści zadania nierówności dla $C=1/10$ i dowolnych $x,y\geqslant 25$.

b) Dowieść, że **zdanie Z** jest fałszywe dla $C=1/12$.
Rozwiązanie:
Dla $x=25$ oraz $y=36$ mamy $|x-y|=11$ oraz

$$|f(x)-f(y)|=1=\frac{|x-y|}{11}>\frac{|x-y|}{12}\,,$$

wskazaliśmy więc przykład liczb $x,y\geqslant 25$, dla których dana w treści zadania nierówność jest fałszywa przy $C=1/12$.

Nie jest więc prawdą, że ta nierówność zachodzi dla dowolnych liczb rzeczywistych $x,y\in[25,\infty)$.

328. Dla funkcji $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ określonej podanym wzorem wskazać odpowiednie liczby rzeczywiste dodatnie x,y i udowodnić nierówność $|f(x)-f(y)|>100\cdot|x-y|$.
a) $f(x)=x^2$
Rozwiązanie:
Z równości

$$|f(x)-f(y)|=\left|x^2-y^2\right|=(x+y)\cdot|x-y|$$

wynika, że warunki zadania spełnia dowolna para **różnych** liczb rzeczywistych dodatnich x,y spełniających warunek

$$x+y>100\,.$$

Możemy więc wskazać $x=50$, $y=51$.

b) $f(x)=\dfrac{1}{x}$
Rozwiązanie:
Z równości

$$|f(x)-f(y)|=\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|=\frac{1}{xy}\cdot|x-y|$$

wynika, że warunki zadania spełnia dowolna para **różnych** liczb rzeczywistych dodatnich x,y spełniających warunek

$$\frac{1}{xy}>100\,,\qquad\text{czyli}\qquad xy<\frac{1}{100}\,.$$

Możemy więc wskazać $x=1/10$, $y=1/11$.

329. Niech funkcja $f:[4,\infty)\to\mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$.
Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y\in[4,\infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{16}\,.$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy i szacujemy lewą stronę dowodzonej nierówności korzystając z nierówności $x, y\geqslant 4$:

$$|f(x)-f(y)|=\left|\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{y}}\right|=\frac{\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right|}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}}=\frac{|x-y|}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\cdot\sqrt{xy}}\leqslant\frac{|x-y|}{\left(\sqrt{4}+\sqrt{4}\right)\cdot\sqrt{16}}=$$
$$=\frac{|x-y|}{(2+2)\cdot 4}=\frac{|x-y|}{16}\,,$$

co kończy dowód nierówności danej w treści zadania.

330. W każdym z zadań **330.1-330.10** podaj dziedzinę funkcji f określonej podanym wzorem.

330.1. $f(x)=\sqrt{(x-64)\cdot(x^2-64)}$ $\quad D_f=\mathbf{[-8,\,8]\cup[64,\,+\infty)}$

330.2. $f(x)=\sqrt{(x^2-64)\cdot(x^3-64)}$ $\quad D_f=\mathbf{[-8,\,4]\cup[8,\,+\infty)}$

330.3. $f(x)=\sqrt{(x^3-64)\cdot(x^6-64)}$ $\quad D_f=\mathbf{[-2,\,2]\cup[4,\,+\infty)}$

330.4. $f(x)=\sqrt{(x^6-64)\cdot(2^x-64)}$ $\quad D_f=\mathbf{[-2,\,2]\cup[6,\,+\infty)}$

330.5. $f(x)=\sqrt{(2^x-64)\cdot(x-64)}$ $\quad D_f=\mathbf{(-\infty,\,6]\cup[64,\,+\infty)}$

330.6. $f(x)=\sqrt{(x-64)^2\cdot(x^3-64)}$ $\quad D_f=\mathbf{[4,\,+\infty)}$

330.7. $f(x)=\sqrt{(x^2-64)^2\cdot(x^6-64)}$ $\quad D_f=\mathbf{(-\infty\,\,-2]\cup[2,\,+\infty)}$

330.8. $f(x)=\sqrt{(x^3-64)^2\cdot(2^x-64)}$ $\quad D_f=\mathbf{\{4\}\cup[6,\,+\infty)}$

330.9. $f(x)=\sqrt{(x^6-64)^2\cdot(x-64)}$ $\quad D_f=\mathbf{\{-2\}\cup\{2\}\cup[64,\,+\infty)}$

330.10. $f(x)=\sqrt{(2^x-64)^2\cdot(x^2-64)}$ $\quad D_f=\mathbf{(-\infty,\,-8]\cup\{6\}\cup[8,\,+\infty)}$

331. W każdym z zadań **331.1-331.10** dla podanej liczby a podaj taką liczbę b, że funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=a|x|+bx$$

spełnia dla każdej liczby rzeczywistej x równość $f(f(x))=x$, czyli jest odwrotna do samej siebie.

331.1. $a=1$, $\quad b=\mathbf{-\sqrt{2}}$

331.2. $a=-1$, $\quad b=\mathbf{-\sqrt{2}}$

331.3. $a=2$, $\quad b=\mathbf{-\sqrt{5}}$

331.4. $a=-2$, $\quad b=\mathbf{-\sqrt{5}}$

331.5. $a=3$, $\quad b=\mathbf{-\sqrt{10}}$

331.6. $a=-3$, $\quad b=\mathbf{-\sqrt{10}}$

331.7. $a=3/4$, $\quad b=\mathbf{-5/4}$

331.8. $a=-3/4$, $\quad b=\mathbf{-5/4}$

331.9. $a=4/3$, $\quad b=\mathbf{-5/3}$

331.10. $a=-4/3$, $\quad b=\mathbf{-5/3}$