Kolokwium nr 9: wtorek 3.01.2017, godz. 9:15-10:00, materiał zad. 1–397.

8. Granica funkcji w punkcie.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 14,19.12.2016 (grupy 2–5).

Obliczyć następujące granice:

332. $\lim\limits_{x\to 7}\left(\frac{1}{x-7}-\frac{8}{x^2-6x-7}\right)$ **333.** $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$ **334.** $\lim\limits_{x\to 0} e^{-1/x^2}$

335. $\lim\limits_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$ **336.** $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x+2}$ **337.** $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-6x+5}{x-5}$

338. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$ **339.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{2016}-1}{x^{10}-1}$ **340.** $\lim\limits_{x\to 1/2}\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$

341. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$ **342.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ **343.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$

344. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$ **345.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ **346.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ **347.** $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln x}{1+\ln x}$

348. $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{2^{1/x}+1}{2^{1/x}-1}$ **349.** $\lim\limits_{x\to 0-}\frac{2^{1/x}+1}{2^{1/x}-1}$ **350.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{2^{1/x}-1}{2^{1/x}+1}$

Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem

351. $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}+\frac{x}{2}$ **352.** $f(x)=\sqrt[3]{x^3+x^2}$ **353.** $f(x)=\frac{x^3+1}{x^2+5x+4}+|x|$

354. Dla których wartości parametrów a, b funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & \text{dla} \quad x<1 \\ x^2 & \text{dla} \quad 1\leqslant x<2 \\ ax-b & \text{dla} \quad 2\leqslant x \end{cases}$$

jest ciągła? Naszkicować wykres funkcji f dla każdej pary parametrów (a,b), dla których funkcja f jest ciągła.

Obliczyć granice funkcji.

355. $\lim\limits_{x\to 0^+}\log_{\left(\sqrt{17}-3\right)}x$ **356.** $\lim\limits_{x\to 0^+}\log_{\left(\sqrt{13}-3\right)}x$ **357.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\log_{\left(\sqrt{17}-3\right)}x$

358. $\lim\limits_{x\to +\infty}\log_{\left(\sqrt{13}-3\right)}x$ **359.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{17}-3\right)^x$ **360.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{13}-3\right)^x$

361. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{17}-3\right)^x$ **362.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{13}-3\right)^x$ **363.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{17}-4\right)x$

364. $\lim\limits_{x\to +\infty}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{13}-4\right)x$

Wyznaczyć wartości granic ciągów (wolno korzystać ze wzoru (♠) poniżej).

365. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)$ **366.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+2016}\right)$ **367.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2016n+1}\right)$

368. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2016}$ **369.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+2016}\right)^{2016}$ **370.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2016n+1}\right)^{2016}$

371. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}$ **372.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2016n}$ **373.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n/2016}$

374. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^{2016}}$ **375.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2016}{n}\right)^{n}$ **376.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{2016}{n}\right)^{n}$

Zadania do omówienia na konwersatorium 20 grudnia 2016.

Twierdzenie o trzech funkcjach: Jeżeli funkcje f, g, h są określone w otoczeniu punktu $x_0\in[-\infty,+\infty]$ (mogą nie być określone w samym x_0), a przy tym

$$f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$$

dla x bliskich x_0, to z istnienia i równości granic funkcji f oraz h w punkcie x_0 wynika

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} h(x)\,.$$

To samo stosuje się do granic jednostronnych.

Obliczyć granice

377. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin\left(x^{1000}\right)}{\sqrt{x}}$ **378.** $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\left\{1/x^{1000}\right\}$ (uwaga: część ułamkowa)

Korzystając ze zbieżności (granica funkcji)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e \qquad (♠)$$

obliczyć

379. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x^2+x}}$ **380.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{7x^2+5x+1}}$ **381.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{x+1}}{(x+1)^x}$

382. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}$ **383.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{x}$

384. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x\cdot f(x)}$, gdzie $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$

Zadania sprawdzające do samodzielnego rozwiązania.

W miarę wolnego czasu mogą być omówione na ćwiczeniach.

Wyznaczyć wartości granic ciągów:

385. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log_2(n+8)}{\log_2 n}$ **386.** $\lim\limits_{n\to\infty}(\log_2(n+8)-\log_2 n)$ **387.** $\lim\limits_{n\to\infty}\log_n(n+8)$

388. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log_2(8n+1)}{\log_2 n}$ **389.** $\lim\limits_{n\to\infty}(\log_2(8n+1)-\log_2 n)$ **390.** $\lim\limits_{n\to\infty}\log_n(8n+1)$

391. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log_2(n^8+1)}{\log_2 n}$ **392.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\log_2\left(n^8+1\right)-\log_2 n\right)$ **393.** $\lim\limits_{n\to\infty}\log_n\left(n^8+1\right)$

394. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=a\{x\}^3+b\{x\}^2+c\{x\}+d\,,$$

gdzie $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x.

W każdym z podpunktów uzupełnij brakującą liczbę tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczba o żądanej własności nie istnieje.

a) $a=\ldots\ldots,\quad b=2,\quad c=3,\quad d=4$
b) $a=1,\quad b=\ldots\ldots,\quad c=3,\quad d=4$
c) $a=1,\quad b=2,\quad c=\ldots\ldots,\quad d=4$
d) $a=1,\quad b=2,\quad c=3,\quad d=\ldots\ldots$

395. Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}\,.$$

396. W każdym z zadań **396.1-396.16** podaj granicę funkcji.

396.1. $\lim\limits_{x\to-\infty}2^x=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ **396.2.** $\lim\limits_{x\to-\infty}2^{2^x}=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

396.3. $\lim\limits_{x\to-\infty}2^{2^{2^x}}=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ **396.4.** $\lim\limits_{x\to-\infty}2^{2^{2^{2^x}}}=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

396.5. $\lim\limits_{x\to-\infty}2^{2^{2^{2^{2^x}}}}=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ **396.6.** $\lim\limits_{x\to-\infty}2^{3^{4^x}}=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

396.7. $\lim\limits_{x\to-\infty}4^{3^{2^x}}=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ **396.8.** $\lim\limits_{x\to-\infty}2^{3^{4^{5^x}}}=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

396.9. $\lim\limits_{x\to-\infty}3^{4^{5^{6^x}}}=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ **396.10.** $\lim\limits_{x\to-\infty}3^{2^{2^{4^{5^x}}}}=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

396.11. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\ldots\ldots\ldots$ **396.12.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)=\ldots\ldots\ldots$

396.13. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}-x\right)=\ldots\ldots$ **396.14.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+2x^2}-x\right)=\ldots\ldots$

396.15. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^7+x^6)}{\ln x}=\ldots\ldots\ldots$ **396.16.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^7+2x^6)}{\ln x}=\ldots\ldots\ldots$

397. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=a\cdot\{2x\}+b\cdot\{2x+1\}+c\cdot\{x\}+d\cdot\left\{x+\frac{1}{2}\right\},$$

gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y.

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

a) $a=1,\quad b=2,\quad c=\ldots\ldots,\quad d=\ldots\ldots$
b) $a=\ldots\ldots,\quad b=2,\quad c=3,\quad d=\ldots\ldots$
c) $a=\ldots\ldots,\quad b=\ldots\ldots,\quad c=3,\quad d=4$
d) $a=2,\quad b=3,\quad c=\ldots\ldots,\quad d=\ldots\ldots$
e) $a=\ldots\ldots,\quad b=3,\quad c=6,\quad d=\ldots\ldots$
f) $a=\ldots\ldots,\quad b=\ldots\ldots,\quad c=6,\quad d=6$