Kolokwium nr 51: piątek 4.11.2016, godz. 8:15-9:00, materiał zad. 1–99, 501-578.

2. Liczby rzeczywiste, liczby wymierne i niewymierne.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 14,18.10.2016 (grupa 1 *lux*).

522. Dowieść, że liczba $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}$ jest niewymierna.

523. Dowieść, że nie istnieje liczba wymierna dodatnia q spełniająca równość

$$q^q=5\,.$$

524. Chcemy zlokalizować położenie względem liczb wymiernych, liczby rzeczywistej $q>1$ spełniającej równanie z poprzedniego zadania. Dla dowolnej liczby wymiernej postaci m/n, gdzie m jest liczbą całkowitą, a n liczbą naturalną, zapisać warunki $m/n<q$ oraz $m/n>q$ używając tylko liczb m, n, działań na liczbach całkowitych, znaków nierówności i ewentualnie symboli logicznych.

Wykorzystać te warunki do porównania liczby q z liczbami $5/2$ oraz $25/12$ (bez użycia kalkulatora, korzystając z nierówności typu: $25<27$, $125<128$).

20 przykładów.

Odpowiedzi, których poprawności nie da się uzasadnić elementarnie, nie mogą być zaliczone.

Dać przykład takiej liczby rzeczywistej x, że

525. $0<x<1$ oraz x jest niewymierna,

526. $\sqrt{5}<x<\sqrt{6}$ oraz x jest wymierna,

527. x^2 i x^3 są niewymierne, ale x^5 jest wymierna,

528. x^4 i x^6 są wymierne, ale x^5 jest niewymierna,

529. $(x+1)^2$ jest niewymierna,

530. x jest niewymierna, ale $x+\frac{1}{x}$ jest wymierna,

531. x jest niewymierna i 2^x jest niewymierna,

532. 2^x+3^x jest liczbą niewymierną,

533. 2^x+3^x jest liczbą wymierną,

534. $\log_2 x+\log_3 x$ jest liczbą niewymierną,

535. $\log_2 x+\log_3 x$ jest liczbą wymierną,

536. $\log_2 x\cdot\log_3 x$ jest liczbą niewymierną,

537. $\log_2 x\cdot\log_3 x$ jest liczbą wymierną,

538. $2^x+\log_2 x$ jest liczbą całkowitą dodatnią,

539. $2^x+\log_2 x$ jest liczbą niewymierną,

540. $x+\log_2 x$ jest liczbą wymierną niecałkowitą,

541. $x^{\sqrt{2}}$ jest liczbą wymierną niecałkowitą,

542. $x^{\sqrt{2}}$ jest liczbą niewymierną,

543. $\log_x(1+x)$ jest liczbą wymierną,

544. $\log_x(1+x)$ jest liczbą niewymierną.

3. Szacowanie liczb i wyrażeń.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 21,25,28.10.2016 (grupa 1 *lux*).

W każdym z poniższych zadań wpisz w miejscu kropek dwie liczby występujące w ciągu 0, 1, 2, 5 ,10, 100, 10^5, 10^{10}, 10^{20}, 10^{50}, 10^{100}, 10^{200}, 10^{500}, 10^{1000}, 10^{2000}, 10^{5000}, 10^{10000}, 10^{20000}, 10^{50000}, 10^{100000}, 10^{200000}, 10^{500000}, $10^{1000000}$ na **kolejnych** miejscach tak, aby powstały prawdziwe nierówności.

545. $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots < 5000! < \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

546. $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots < 35000! < \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

547. $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots < \left(10^5\right)! < \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

548. $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots < \left(7+2\sqrt{2}\right)^{500} < \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

549. $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots < \left(6+3\sqrt{2}\right)^{500} < \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

550. $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots < \left(91+\sqrt{91}\right)^{100} < \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

551. $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots < \binom{1000}{3} < \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

552. $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots < \binom{1000}{4} < \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

553. $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots < \binom{10000}{5} < \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

554. $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots < \sum_{n=1}^{10^{30}} n < \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

555. $$\ldots\ldots\ldots\ldots < \sum_{n=1}^{10^{30}} n^2 < \ldots\ldots\ldots\ldots$$

556. $$\ldots\ldots\ldots\ldots < \sum_{n=1}^{10^{30}} n^{10} < \ldots\ldots\ldots\ldots$$

557. $$\ldots\ldots\ldots\ldots < \sum_{n=1}^{10^{4}} n! < \ldots\ldots\ldots\ldots$$

558. $$\ldots\ldots\ldots\ldots < \binom{10^5}{100} < \ldots\ldots\ldots\ldots$$

559. $$\ldots\ldots\ldots\ldots < \binom{10^{10}}{20} < \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Przy każdej z poniższych pięciu liczb n podaj w miejscu kropek liczbę cyfr liczby n oraz pierwszą (od lewej) cyfrę liczby n w zapisie dziesiętnym.

560. $n=\binom{10^{100}}{2}$, liczba cyfr ...., pierwsza cyfra ....

561. $n=\binom{10^{100}}{3}$, liczba cyfr ...., pierwsza cyfra ....

562. $n=\binom{2\cdot 10^{100}}{2}$, liczba cyfr ...., pierwsza cyfra ....

563. $n=\binom{2\cdot 10^{100}}{3}$, liczba cyfr ...., pierwsza cyfra ....

564. $n=\binom{2\cdot 10^{100}}{4}$, liczba cyfr ...., pierwsza cyfra ....

565. Wskazać taką liczbę naturalną n, że

$$n^{1000000}+1<2^n\,.$$

566. Która z liczb jest większa: $\displaystyle\prod_{i=2}^{2015}\prod_{j=1}^{i-1}\left(\sqrt[j]{j}-\sqrt[i]{i}\right)$ czy $10^{-1000000}$?

567. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C\leqslant\frac{\sqrt{9n+16}-3\sqrt{n}}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}}\leqslant 2C\,.$$

568. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leqslant \frac{\sqrt{9n+40}-\sqrt{9n+16}}{\sqrt{4n+45}-\sqrt{4n+5}} \leqslant 5C\,.$$

Oszacować podane wyrażenia, gdzie $n\in\mathbb{N}$, od góry i od dołu przez wyrażenia różniące się stałym czynnikiem dodatnim

569. $\dfrac{2^n+10n^2}{2^n+n^4}$ **570.** $\dfrac{4^n+n^4}{2^n+n^2}$ **571.** $\dfrac{n!}{n!+10^n}$ **572.** $\dfrac{(n+2)!}{n!+10^n}$

573. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej $n\geqslant$ .... zachodzi nierówność

$$n^{32}\leqslant 2^n\,.$$

W miejsce kropek wstaw dowolną liczbę, dla której umiesz przeprowadzić dowód.

Następnie zastanów się nad modyfikacją dowodu tak, aby zmniejszyć liczbę wpisaną w miejsce kropek.

574. Dobrać odpowiednie liczby wymierne dodatnie C oraz D i udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C\leqslant \frac{6n^{11}-3n^6+2}{6n^{11}-3n^5+3}\leqslant D\,.$$

Liczby C i D muszą spełniać nierówność $D\leqslant 4C$.

W wersji trudniejszej liczby C i D spełniają nierówność $D\leqslant 2C$.

Dla podanego wyrażenia $W(n)$ dobrać odpowiednie stałe g oraz C i udowodnić, że nierówności $g-C/n<W(n)<g+C/n$ są prawdziwe dla każdej liczby naturalnej n.

575. $\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\dfrac{n}{n^2+3}+\ldots+\dfrac{n}{n^2+n}$ **576.** $\sqrt[4]{n^4+n^3}-n$

577. Udowodnić nierówności $1-\dfrac{4}{n^{3/4}}<\sqrt[n]{n}<1+\dfrac{4}{n^{3/4}}$.

578. Udowodnić nierówności $1-\dfrac{1000}{n^{999/1000}}<\sqrt[n]{n}<1+\dfrac{1000}{n^{999/1000}}$.

Przypomnienie fragmentu rachunków z wykładu:

Niech $c_n=\sqrt[n]{n}-1$. Wówczas

$$n=(1+c_n)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}c_n^k\,,$$

skąd

$$\binom{n}{k}c_n^k<n$$

dla $n\geqslant k$.