579. Dowieść, że ciąg (a_n) określony wzorem
$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$
jest rosnący.

580. Dowieść, że ciąg (a_n) określony wzorem
$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$
jest malejący.

581. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności
$$C \leqslant \sqrt[8]{n^8+255n^7}-n \leqslant 32C\,.$$
Pomoc dla osób mniej biegłych rachunkowo: $255=15\cdot 17=3\cdot 5\cdot 17$ oraz $256=2^8=16\cdot 16=8\cdot 32$.

582. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzą nierówności
$$\frac{2}{3}\cdot n\cdot\sqrt{n+1} \;<\; \sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}+\ldots+\sqrt{n-1}+\sqrt{n} \;<\; \frac{2}{3}\cdot\sqrt{n}\cdot(n+1)\,.$$

583. Ciąg (a_n) spełnia warunek
$$\underset{\varepsilon\geqslant 1}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{n\geqslant N}{\forall}\ |a_n-1|\leqslant\varepsilon\ .$$
Czy stąd wynika, że

583.1 ciąg (a_n) jest zbieżny ....
583.2 ciąg (a_n) jest rozbieżny ....
583.3 ciąg (a_n) jest ograniczony ....
583.4 wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie ....
583.5 wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są nieujemne ....
583.6 od pewnego miejsca wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie ....
583.7 od pewnego miejsca wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są nieujemne ....
583.8 w ciągu (a_n) występuje nieskończenie wiele wyrazów dodatnich ....
583.9 w ciągu (a_n) występuje nieskończenie wiele wyrazów nieujemnych ....
583.10 w ciągu (a_n) występuje co najmniej jeden wyraz dodatni ....
583.11 w ciągu (a_n) występuje co najmniej jeden wyraz nieujemny ....
583.12 $\underset{n}{\forall}\ a_n>0$ ....
583.13 $\underset{n}{\forall}\ a_n\geqslant 0$ ....
583.14 $\underset{N}{\exists}\ \underset{n\geqslant N}{\forall}\ a_n>0$ ....
583.15 $\underset{N}{\exists}\ \underset{n\geqslant N}{\forall}\ a_n\geqslant 0$ ....
583.16 $\underset{N}{\forall}\ \underset{n\geqslant N}{\exists}\ a_n>0$ ....
583.17 $\underset{N}{\forall}\ \underset{n\geqslant N}{\exists}\ a_n\geqslant 0$ ....
583.18 $\underset{n}{\exists}\ a_n>0$ ....
583.19 $\underset{n}{\exists}\ a_n\geqslant 0$ ....

584. Ciąg (a_n) spełnia warunek

$$\underset{n>1000}{\forall} |a_n - 100| < 10\,.$$

Czy stąd wynika, że

a) ciąg (a_n) jest zbieżny,

b) ciąg (a_n) jest rozbieżny,

c) każdy wyraz ciągu (a_n) jest dodatni,

d) ciąg (a_n) ma co najmniej jeden wyraz dodatni,

e) od pewnego miejsca wszystkie wyrazy ciągu są dodatnie,

f) $a_{666} < 7777777$,

g) $a_{1111} > 88$,

h) $\underset{n>1729}{\forall} |a_n - 100| < 1\,,$

i) $\underset{n>345}{\forall} |a_n - 100| < 17\,,$

j) $\underset{n>5555}{\forall} |a_n - 99| < 13\,,$

k) ciąg (a_n) jest ograniczony,

l) $\underset{n>444}{\exists} |a_n - 95| < 37\,,$

m) $\underset{n>4444}{\exists} |a_n - 80| < 37\,,$

n) $\underset{n<444}{\exists} |a_n - 95| < 37\,,$

o) $\underset{n<4444}{\exists} |a_n - 80| < 37\,,$

p) $\underset{m}{\forall}\ \underset{n>m}{\exists}\ a_n > 0\,,$

q) $\underset{n>1331}{\forall} |a_n - 66| > 12\,,$

r) $\underset{m>1234}{\forall}\ \underset{n>5678}{\forall} |a_n - a_m| < 7\,,$

s) $\underset{m>1234}{\forall}\ \underset{n>5678}{\forall} |a_n - a_m| < 17\,,$

t) $\underset{m>123}{\forall}\ \underset{n>45678}{\forall} |a_n - a_m| < 27\,,$

u) $\underset{m>1234}{\forall}\ \underset{n>5678}{\forall} |a_n - a_m| < 37\,,$

v) $\underset{m<123}{\exists}\ \underset{n<456}{\exists} |a_n - a_m| < 3\,,$

w) $\underset{m>12345}{\forall}\ \underset{n>67890}{\forall} |a_n + a_m| < 210\,,$

x) $\underset{m>1296}{\forall}\ \underset{n>7776}{\forall} |a_n + a_m| < 222\,,$

y) $\underset{m>1024}{\forall}\ \underset{n>8192}{\forall} |a_n + a_m| > 128\,,$

z) $\underset{n}{\exists}\ a_n < 92\,,$

ź) $\underset{n}{\exists}\ a_n > 91\,,$

ż) $\underset{m}{\exists}\ \underset{n\neq m}{\exists} |a_n - a_m| < 10^{-1000000}\,.$