579. Dowieść, że ciąg (a_n) określony wzorem

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

jest rosnący.

Rozwiązanie:

Dla udowodnienia tezy zadania należy wykazać, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Powyższą nierówność możemy przepisać w postaci

$$\frac{(n+1)^n}{n^n}<\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}},$$

czyli

$$(n+1)^{2n+1}<n^n\cdot(n+2)^{n+1}. \tag{1}$$

Mnożąc nierówność (1) stronami przez n otrzymujemy nierówność równoważną

$$n\cdot(n+1)^{2n+1}<n^{n+1}\cdot(n+2)^{n+1},$$

którą możemy zapisać jako

$$\left(n^2+n\right)\cdot\left(n^2+2n+1\right)^n<\left(n^2+2n\right)^{n+1}. \tag{2}$$

Ponieważ po każdej ze stron nierówności (2) występuje iloczyn $n+1$ czynników o takiej samej sumie równej n^3+3n^2+2n, większą wartość ma ten iloczyn, którego czynniki są równe.

580. Dowieść, że ciąg (a_n) określony wzorem

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

jest malejący.

Rozwiązanie:

Dla udowodnienia tezy zadania należy wykazać, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}.$$

Powyższą nierówność możemy przepisać w postaci

$$\frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}}>\frac{(n+2)^{n+2}}{(n+1)^{n+2}},$$

czyli

$$(n+1)^{2n+3}>n^{n+1}\cdot(n+2)^{n+2}. \tag{3}$$

Mnożąc nierówność (3) stronami przez $n+1$ otrzymujemy nierówność równoważną

$$(n+1)^{2n+4}>(n+1)\cdot n^{n+1}\cdot(n+2)^{n+2},$$

którą możemy zapisać jako

$$\left(n^2+2n+1\right)^{n+2}>\left(n^2+3n+2\right)\cdot\left(n^2+2n\right)^{n+1}. \tag{4}$$

Ponieważ po każdej ze stron nierówności (4) występuje iloczyn $n+2$ czynników o takiej samej sumie równej n^3+4n^2+5n+2, większą wartość ma ten iloczyn, którego czynniki są równe.

581. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leqslant \sqrt[8]{n^8+255n^7}-n \leqslant 32C\,.$$

Pomoc dla osób mniej biegłych rachunkowo: $255=15\cdot 17=3\cdot 5\cdot 17$ oraz $256=2^8=16\cdot 16=8\cdot 32$.

Rozwiązanie:

Sposób I:

Ponieważ wyrażenie dane w treści zadania jest różnicą wyrażeń zbliżonej wielkości, powinniśmy przez wykorzystanie wzorów skróconego mnożenia doprowadzić je do postaci, w której można będzie wykonać odejmowanie.

W tym celu trzykrotnie zastosujemy wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}\,,$$

gdzie przy dodatnich a, b mianownik jest zawsze różny od zera.

Możemy też od razu zastosować wzór na różnicę ósmych potęg w postaci

$$a-b=\frac{a^8-b^8}{(a+b)\cdot(a^2+b^2)\cdot(a^4+b^4)}\,,$$

który powstaje właśnie przez trzykrotne skorzystanie ze wzoru na różnicę kwadratów.

Otrzymujemy

$$\sqrt[8]{n^8+255n^7}-n=\frac{255n^7}{\left(\sqrt[8]{n^8+255n^7}+n\right)\cdot\left(\sqrt[4]{n^8+255n^7}+n^2\right)\cdot\left(\sqrt{n^8+255n^7}+n^4\right)}\,. \qquad (\diamondsuit)$$

Szacujemy ostatnie wyrażenie od dołu, szacując mianownik od góry:

$$\frac{255n^7}{\left(\sqrt[8]{n^8+255n^7}+n\right)\cdot\left(\sqrt[4]{n^8+255n^7}+n^2\right)\cdot\left(\sqrt{n^8+255n^7}+n^4\right)} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{255n^7}{\left(\sqrt[8]{n^8+255n^8}+n\right)\cdot\left(\sqrt[4]{n^8+255n^8}+n^2\right)\cdot\left(\sqrt{n^8+255n^8}+n^4\right)}=$$

$$=\frac{255n^7}{17n\cdot 5n^2\cdot 3n^4}=\frac{255n^7}{255n^7}=1$$

i od góry (szacując mianownik od dołu):

$$\frac{255n^7}{\left(\sqrt[8]{n^8+255n^7}+n\right)\cdot\left(\sqrt[4]{n^8+255n^7}+n^2\right)\cdot\left(\sqrt{n^8+255n^7}+n^4\right)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{255n^7}{\left(\sqrt[8]{n^8+0}+n\right)\cdot\left(\sqrt[4]{n^8+0}+n^2\right)\cdot\left(\sqrt{n^8+0}+n^4\right)}=$$

$$=\frac{255n^7}{2n\cdot 2n^2\cdot 2n^4}=\frac{255n^7}{8n^7}=\frac{255}{8}<\frac{256}{8}=32\,.$$

Otrzymaliśmy więc wymagane oszacowania ze stałą $C=1$.

Sposób II:

Zaczynamy jak w sposobie I. Otrzymawszy wyrażenie ($\diamondsuit$) przekształcamy je dalej i oznaczamy przez a_n:

$$\frac{255n^7}{\left(\sqrt[8]{n^8+255n^7}+n\right)\cdot\left(\sqrt[4]{n^8+255n^7}+n^2\right)\cdot\left(\sqrt{n^8+255n^7}+n^4\right)}=$$

$$=\frac{255}{\left(\sqrt[8]{1+255n^{-1}}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{1+255n^{-1}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+255n^{-1}}+1\right)}=a_n\,.$$

Ponieważ w powyższym wyrażeniu wraz ze wzrostem n maleje mianownik, a przy tym wszystkie składowe tego wyrażenia są dodatnie, ciąg (a_n) jest rosnący. Dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą więc nierówności

$$a_1 \leqslant a_n < \lim_{k\to\infty} a_k\,. \qquad (\clubsuit)$$

Ponieważ

$$a_1=\sqrt[8]{1+255}-1=2-1=1$$

oraz

$$\lim_{k\to\infty} a_k=\lim_{k\to\infty}\frac{255}{\left(\sqrt[8]{1+255k^{-1}}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{1+255k^{-1}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+255k^{-1}}+1\right)}=$$

$$=\frac{255}{\left(\sqrt[8]{1+0}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{1+0}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+0}+1\right)}=\frac{255}{2\cdot2\cdot2}=\frac{255}{8}<\frac{256}{8}=32\,,$$

otrzymujemy wymagane oszacowania ze stałą $C=1$.

Uwaga:

Formalnie poprawna, ale dydaktycznie bardzo niezręczna wersja nierówności ($\clubsuit$), to

$$a_1 \leqslant a_n < \lim_{n\to\infty} a_n\,.$$

W powyższym wzorze zmienna n występuje w dwóch zupełnie różnych rolach. Przemianowanie jednego z jej bytów na k pozwala uniknąć nieporozumień.

582. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$\frac{2}{3}\cdot n\cdot\sqrt{n+1} \;<\; \sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}+\ldots+\sqrt{n-1}+\sqrt{n} \;<\; \frac{2}{3}\cdot\sqrt{n}\cdot(n+1)\,.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n=1$ dowodzone nierówności przyjmują postać

$$\frac{2}{3}\cdot\sqrt{2} \;<\; 1 \;<\; \frac{2}{3}\cdot 2\,,$$

wystarczy więc zauważyć, że

$$\frac{2}{3}\cdot\sqrt{2}=\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{9}}<1$$

oraz

$$\frac{2}{3}\cdot 2=\frac{4}{3}>1\,.$$

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że prawdziwe są nierówności

$$\frac{2}{3}\cdot n\cdot\sqrt{n+1} \;<\; \sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}+\ldots+\sqrt{n-1}+\sqrt{n} \;<\; \frac{2}{3}\cdot\sqrt{n}\cdot(n+1)\,. \qquad (\clubsuit)$$

Udowodnimy, że wówczas analogiczne nierówności są prawdziwe po zastąpieniu liczby n liczbą $n+1$, a mianowicie

$$\frac{2}{3}\cdot(n+1)\cdot\sqrt{n+2} \;<\; \sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\ldots+\sqrt{n}+\sqrt{n+1} \;<\; \frac{2}{3}\cdot\sqrt{n+1}\cdot(n+2)\,. \quad (\diamondsuit)$$

W celu dowodu lewej nierówności $(\diamondsuit)$ skorzystamy z lewej nierówności założenia indukcyjnego $(\clubsuit)$. Otrzymujemy

$$\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\ldots+\sqrt{n}+\sqrt{n+1}>\frac{2}{3}\cdot n\cdot\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}\,,$$

a więc do zakończenia dowodu lewej nierówności $(\diamondsuit)$ wystarczy dowieść, że

$$\frac{2}{3}\cdot n\cdot\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}\geqslant\frac{2}{3}\cdot(n+1)\cdot\sqrt{n+2}\,. \qquad (\spadesuit)$$

Przekształcanie nierówności $(\spadesuit)$ prowadzi kolejno do nierówności równoważnych:

$$\frac{2}{3}\cdot n\cdot\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}\geqslant\frac{2}{3}\cdot(n+1)\cdot\sqrt{n+2}\,, \qquad \Big|:\sqrt{n+1}$$

$$\frac{2}{3}\cdot n+1\geqslant\frac{2}{3}\cdot\sqrt{(n+1)\cdot(n+2)}\,,$$

$$n+\frac{3}{2}\geqslant\sqrt{(n+1)\cdot(n+2)}\,,$$

$$\frac{(n+1)+(n+2)}{2}\geqslant\sqrt{(n+1)\cdot(n+2)}\,,$$

a ta nierówność jest prawdziwa jako nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną liczb $n+1$ i $n+2$.

Analogicznie postępujemy dla dowodu prawej nierówności $(\diamondsuit)$. Korzystając z prawej nierówności założenia indukcyjnego $(\clubsuit)$ otrzymujemy

$$\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\ldots+\sqrt{n}+\sqrt{n+1}<\frac{2}{3}\cdot\sqrt{n}\cdot(n+1)+\sqrt{n+1}\,,$$

a więc do zakończenia dowodu prawej nierówności $(\diamondsuit)$ wystarczy dowieść, że

$$\frac{2}{3}\cdot\sqrt{n}\cdot(n+1)+\sqrt{n+1}\leqslant\frac{2}{3}\cdot\sqrt{n+1}\cdot(n+2)\,. \qquad (\spadesuit\spadesuit)$$

Przekształcanie nierówności $(\spadesuit\spadesuit)$ prowadzi kolejno do nierówności równoważnych:

$$\frac{2}{3}\cdot\sqrt{n}\cdot(n+1)+\sqrt{n+1}\leqslant\frac{2}{3}\cdot\sqrt{n+1}\cdot(n+2)\,, \qquad \Big|:\sqrt{n+1}$$

$$\frac{2}{3}\cdot\sqrt{n\cdot(n+1)}+1\leqslant\frac{2}{3}\cdot(n+2)\,,$$

$$\sqrt{n\cdot(n+1)}+\frac{3}{2}\leqslant n+2\,,$$

$$\sqrt{n\cdot(n+1)}\leqslant n+\frac{1}{2}\,,$$

$$\sqrt{n\cdot(n+1)}\leqslant\frac{n+(n+1)}{2}\,,$$

a ta nierówność jest prawdziwa jako nierówność między średnią geometryczną i arytmetyczną liczb n i $n+1$.

Na mocy zasady indukcji matematycznej dane w zadaniu nierówności zostały udowodnione dla każdej liczby naturalnej n.

583. Ciąg (a_n) spełnia warunek

$$\underset{\varepsilon\geqslant1}{\forall}\;\underset{N}{\exists}\;\underset{n\geqslant N}{\forall}\;|a_n-1|\leqslant\varepsilon\,.$$

Czy stąd wynika, że

583.1 ciąg (a_n) jest zbieżny **NIE**

583.2 ciąg (a_n) jest rozbieżny **NIE**

583.3 ciąg (a_n) jest ograniczony **TAK**

583.4 wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie **NIE**

583.5 wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są nieujemne **NIE**

583.6 od pewnego miejsca wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie **NIE**

583.7 od pewnego miejsca wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są nieujemne **TAK**

583.8 w ciągu (a_n) występuje nieskończenie wiele wyrazów dodatnich **NIE**

583.9 w ciągu (a_n) występuje nieskończenie wiele wyrazów nieujemnych **TAK**

583.10 w ciągu (a_n) występuje co najmniej jeden wyraz dodatni **NIE**

583.11 w ciągu (a_n) występuje co najmniej jeden wyraz nieujemny **TAK**

583.12 $\underset{n}{\forall}\; a_n>0$ **NIE**

583.13 $\underset{n}{\forall}\; a_n\geqslant0$ **NIE**

583.14 $\underset{N}{\exists}\;\underset{n\geqslant N}{\forall}\; a_n>0$ **NIE**

583.15 $\underset{N}{\exists}\;\underset{n\geqslant N}{\forall}\; a_n\geqslant0$ **TAK**

583.16 $\underset{N}{\forall}\;\underset{n\geqslant N}{\exists}\; a_n>0$ **NIE**

583.17 $\underset{N}{\forall}\;\underset{n\geqslant N}{\exists}\; a_n\geqslant0$ **TAK**

583.18 $\underset{n}{\exists}\; a_n>0$ **NIE**

583.19 $\underset{n}{\exists}\; a_n\geqslant0$ **TAK**