Kolokwium nr 52: piątek 18.11.2016, godz. 8:15-9:00, materiał zad. 1–140, 501-585.
Kolokwium nr 53: piątek 25.11.2016, godz. 8:15-9:00, materiał zad. 1–150, 501-592.
Kolokwium nr 54: piątek 2.12.2016, godz. 8:15-9:00, materiał zad. 1–283, 501-642.

4. Ciągi liczbowe.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 8,18.11.2016 (grupa 1 *lux*).

Zadania z rozwiązaniami.

585. Wskaż liczbę rzeczywistą k, dla której podana granica istnieje i jest dodatnią liczbą rzeczywistą. Podaj wartość granicy dla tej wartości parametru k. Jeżeli odpowiedź jest liczbą wymierną, podaj ją w postaci ułamka nieskracalnego lub liczby całkowitej.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\binom{n}{3}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ dla $k = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\binom{n+4}{n}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ dla $k = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\binom{2n}{4}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ dla $k = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\binom{2n+2}{5}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ dla $k = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\binom{2n+2015}{6}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ dla $k = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

586. Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{n^4+n}}+\frac{n+1}{\sqrt{n^4+n+1}}+\frac{n+2}{\sqrt{n^4+n+2}}+\frac{n+3}{\sqrt{n^4+n+3}}+\ldots+\frac{9n}{\sqrt{n^4+9n}}\right).$$

587. Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2}{n^3}+\frac{4n^2+n}{n^3+1}+\frac{4n^2+2n}{n^3+2}+\frac{4n^2+3n}{n^3+3}+\frac{4n^2+4n}{n^3+4}+\ldots+\frac{9n^2-n}{n^3+5n-1}+\frac{9n^2}{n^3+5n}\right).$$

588. Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\binom{n}{0}}{\sqrt{4^n+1}}+\frac{\binom{n}{1}}{\sqrt{4^n+3}}+\frac{\binom{n}{2}}{\sqrt{4^n+9}}+\frac{\binom{n}{3}}{\sqrt{4^n+27}}+\ldots+\frac{\binom{n}{n-1}}{\sqrt{4^n+3^{n-1}}}+\frac{\binom{n}{n}}{\sqrt{4^n+3^n}}\right).$$

589. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{4n^2+1}+\sqrt{9n^2+1}+\sqrt{16n^2+1}+\sqrt{25n^2+1}+\sqrt{36n^2+1}+\ldots+\sqrt{n^4+1}}{n^k}$$

dla tak dobranej wartości naturalnej parametru k, aby granica ta była liczbą rzeczywistą dodatnią.

590. Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+2}+\sqrt{16+16}+\sqrt{2^8+2^7}+\sqrt{2^{12}+2^{10}}+\sqrt{2^{16}+2^{13}}+\ldots+\sqrt{2^{4n}+2^{3n+1}}}{4^n+1}.$$

591. Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{1+1}}{\sqrt{n^{24}+1}}+\frac{\sqrt{1+2^6}}{\sqrt{n^{24}+2^6}}+\frac{\sqrt{1+3^6}}{\sqrt{n^{24}+3^6}}+\ldots+\frac{\sqrt{1+k^6}}{\sqrt{n^{24}+k^6}}+\ldots+\frac{\sqrt{1+n^{18}}}{\sqrt{n^{24}+n^{18}}}\right).$$

Wskazówka-przypomnienie: $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\dfrac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}$.

592. Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n}{\sqrt{9^n+5^n}}+\frac{2^{n-1}\cdot 3}{\sqrt{9^n+5^{n-1}\cdot 7}}+\frac{2^{n-2}\cdot 3^2}{\sqrt{9^n+5^{n-2}\cdot 7^2}}+\ldots+\frac{2^{n-k}\cdot 3^k}{\sqrt{9^n+5^{n-k}\cdot 7^k}}+\ldots+\frac{3^n}{\sqrt{9^n+7^n}}\right).$$

5. Kresy zbiorów.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 22,25.11.2016 (grupa 1 *lux*).

593. Zbiory A i B są niepuste i ograniczone. Zbiór B jest skończony i wszystkie jego elementy są różne od 0. Czy zbiór $\left\{\frac{a}{b}:\ a\in A,\ b\in B\right\}$ musi być ograniczony? Odpowiedź uzasadnić.

594. A jest takim niepustym zbiorem ograniczonym liczb rzeczywistych, że $\inf A=-3$, $\sup A=2$. Jakie wartości mogą przyjmować kresy zbioru $\{|a|:\ a\in A\}$? Odpowiedź uzasadnić przykładem lub dowodem.

595. Podać przykład takich zbiorów A, B, że $\inf A=2$, $\sup A=7$, $\inf B=3$, $\sup B=10$, $\inf(A\cap B)=4$, $\sup(A\cap B)=6$, $A\cap\mathbb{N}=B\cap\mathbb{N}=\emptyset$.

Przeczytaj poniższe warunki. Które z nich są równoważne temu, że $g=\sup A$?

596. $\left(\underset{a\in A}{\forall}\, a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon>0}{\forall}\,\underset{a\in A}{\exists}\, a<g+\varepsilon\right)$

597. $\left(\underset{a\in A}{\forall}\, a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon>0}{\forall}\,\underset{a\in A}{\exists}\, |a-g|<\varepsilon\right)$

598. $\left(\underset{a\in A}{\forall}\, a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon>0}{\forall}\,\underset{a\in A}{\exists}\, a>g-2\varepsilon\right)$

599. $\left(\underset{a\in A}{\forall}\, a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon>0}{\forall}\,\underset{a\in A}{\exists}\, a>g-\frac{\varepsilon}{2}\right)$

600. $\left(\underset{a\in A}{\forall}\, a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\,\underset{a\in A}{\exists}\, a>g-\frac{1}{n}\right)$

601. $\left(\underset{a\in A}{\forall}\, a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\,\underset{a\in A}{\exists}\, n^2(g-a)<\frac{1}{n}\right)$

602. $\left(\underset{a\in A}{\forall}\, a<g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon>0}{\forall}\,\underset{a\in A}{\exists}\, (a-g)^2<\varepsilon\right)$

603. $\left(\underset{a\in A}{\forall}\, a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon>0}{\forall}\,\underset{a\in A}{\exists}\, (a-g)^2<\varepsilon\right)$

604. $\left(\underset{a\in A}{\forall}\, a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon<g}{\forall}\,\underset{a\in A}{\exists}\, a>\varepsilon\right)$

605. $\left(\underset{a\in A}{\forall}\, a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon<g}{\forall}\,\underset{a\in A}{\exists}\, a>g-\varepsilon\right)$

606. $\left(\underset{a\in A}{\forall}\, a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{0<\varepsilon<1}{\forall}\,\underset{a\in A}{\exists}\, a>g-\varepsilon\right)$

607. $\left(\underset{a\in A}{\forall}\, a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon>0}{\forall}\,\underset{a\in A}{\exists}\, a\geqslant g-\varepsilon\right)$

608. $\left(\underset{a\in A}{\forall}\, a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon\geqslant 0}{\forall}\,\underset{a\in A}{\exists}\, a\geqslant g-\varepsilon\right)$

609. $\left(\underset{a\in A}{\forall}\, a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon\geqslant 0}{\forall}\,\underset{a\in A}{\exists}\, a>g-\varepsilon\right)$

610. $\left(\underset{a\in A}{\forall}\, a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{a\in A}{\forall}\,\underset{b\in A}{\exists}\, b\geqslant \frac{g+a}{2}\right)$

611. $\left(\underset{a\in A}{\exists}\, a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{a\in A}{\forall}\, a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{a\in A}{\forall}\,\underset{b\in A}{\exists}\, b\geqslant \frac{g+a}{2}\right)$

612. $\left(\underset{a\in A}{\exists}\, a^2\geqslant 0\right)\wedge\left(\underset{a\in A}{\forall}\, a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{a\in A}{\forall}\,\underset{b\in A}{\exists}\, b\geqslant \frac{g+a}{2}\right)$

613. $\left(\underset{a\in A}{\exists}\, a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon>0}{\forall}\,\underset{a\in A}{\exists}\, a>g-\varepsilon\right)$

W każdym z poniższych zadań podaj kresy zbioru Z oraz określ, czy kresy należą do zbioru Z.

614. $Z=\left\{\frac{3}{n}-\frac{5}{m^2} : m,n\in\mathbb{N}\right\}$

615. $Z=\left\{\frac{mn^2}{m^2+n^4} : m,n\in\mathbb{N}\right\}$

616. $Z=\{|x+y|-|x|-|y| : x,y\in\mathbb{R}\}$

617. $Z=\left\{\frac{1}{5^n-3^m} : m,n\in\mathbb{N}\right\}$

618. $Z=\left\{\frac{mn}{m^2+9n^2} : m,n\in\mathbb{N}\right\}$

619. $Z=\left\{\frac{m^2+5n^2}{mn} : m,n\in\mathbb{N}\right\}$

620. $Z=\left\{\frac{3m^2+7n^2}{mn} : m,n\in\mathbb{N}\right\}$

621. $Z=\left\{\frac{m+n}{p} : m,n,p\in\mathbb{N}\wedge m^2>2p^2\wedge n^2>3p^2\right\}$

622. $Z=\left\{\frac{mn}{m^2+n^2+1} : m,n\in\mathbb{N}\right\}$

Niepotrzebne skreślić.

W każdej parze ramek tylko jedna zawiera sensowne uzupełnienie tekstu matematycznego.

TWIERDZENIE **623.** Niech A i B będą niepustymi zbiorami ograniczonymi. Niech

$C=\{a-b:\ a\in A\wedge b\in B\}$. Wtedy $\inf C=\boxed{\inf A-\sup B}\boxed{\sup B-\inf A}$.

Dowód:

Niech $d=\inf A$ i $g=\sup B$. Wtedy z warunku $d=\inf A$ wynika, że

(1) $\boxed{\underset{a\in A}{\forall}}\boxed{\underset{a\in A}{\exists}}\ \boxed{a\leqslant d}\boxed{a\geqslant d}$

oraz

(2) $\boxed{\underset{\varepsilon>0}{\forall}}\boxed{\underset{\varepsilon>0}{\exists}}\ \boxed{\underset{a\in A}{\forall}}\boxed{\underset{a\in A}{\exists}}\ \boxed{a<d+\varepsilon}\boxed{a>d-\varepsilon}$.

Podobnie z warunku $g=\sup B$ wynika

(3) $\boxed{\underset{b\in B}{\forall}}\boxed{\underset{b\in B}{\exists}}\ \boxed{b\leqslant g}\boxed{b\geqslant g}$

oraz

(4) $\boxed{\underset{\varepsilon>0}{\forall}}\boxed{\underset{\varepsilon>0}{\exists}}\ \boxed{\underset{b\in B}{\forall}}\boxed{\underset{b\in B}{\exists}}\ \boxed{b<g+\varepsilon}\boxed{b>g-\varepsilon}$.

Chcemy wykazać, że $\inf C=e$, gdzie $e=\boxed{d-g}\boxed{g-d}$, czyli, że

(5) $\boxed{\underset{c\in C}{\forall}}\boxed{\underset{c\in C}{\exists}}\ \boxed{c\leqslant e}\boxed{c\geqslant e}$

oraz

(6) $\boxed{\underset{\varepsilon>0}{\forall}}\boxed{\underset{\varepsilon>0}{\exists}}\ \boxed{\underset{c\in C}{\forall}}\boxed{\underset{c\in C}{\exists}}\ \boxed{c<e+\varepsilon}\boxed{c>e-\varepsilon}$.

$\boxed{\text{W dowodzie warunku (5) skorzystamy z (1) i (3).}}$

$\boxed{\text{Zakładając (5) wykażemy prawdziwość warunków (1) i (3).}}$

$\boxed{\text{Dowolna}}\boxed{\text{Istnieje}}$ liczba $c\in C$ $\boxed{\text{jest}}\boxed{\text{będąca}}$ postaci $c=a-b$, gdzie $a\in A$ i $b\in B$. Z nierówności $\boxed{a\leqslant d}\boxed{a\geqslant d}$ i $\boxed{b\leqslant g}\boxed{b\geqslant g}$ otrzymujemy $\boxed{a-b\leqslant e}\boxed{a-b\geqslant e}$, co dowodzi (5).

$\boxed{\text{Załóżmy}}\boxed{\text{Wykażemy}}$ teraz prawdziwość warunku (6).

$\boxed{\text{Niech } \varepsilon \text{ będzie dowolną liczbą dodatnią. Wtedy}}$

$\boxed{\text{Znajdziemy taką liczbę dodatnią } \varepsilon\text{, dla której}}$

istnieje $a\in A$ takie, że $\boxed{a>d-\varepsilon}\boxed{a<d+\frac{\varepsilon}{2}}$ oraz $b\in B$ takie, że $\boxed{b<g+\varepsilon}\boxed{b>g-\frac{\varepsilon}{2}}$. Zatem liczba $c=a-b$ spełnia nierówność $\boxed{c<e+\varepsilon}\boxed{c>e-\varepsilon}$, co kończy dowód warunku (6).

Zadania z rozwiązaniami.

W każdym z poniższych zadań podaj kresy zbioru oraz określ, czy kresy należą do zbioru.

624. $A=\left\{\frac{1}{n^2-44}:n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf A=$ .... $\sup A=$ ....

625. $B=\left\{\frac{(-1)^n}{n^2+44}:n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf B=$ .... $\sup B=$ ....

626. $C=\left\{\frac{(-1)^n}{n^2-44}:n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf C=$ .... $\sup C=$ ....

627. $D=\left\{\left(\frac{-1}{3}\right)^n:n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf D=$ .... $\sup D=$ ....

628. $E=\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{3^i}:n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf E=$ .... $\sup E=$ ....

629. $A=\left\{\frac{1}{n^2-40n+350}:n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf A=$ .... $\sup A=$ ....

630. $B=\left\{\frac{1}{n^2-40n+370}:n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf B=$ .... $\sup B=$ ....

631. $C=\left\{\frac{1}{n^2-40n+390}:n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf C=$ .... $\sup C=$ ....

632. $D=\left\{\frac{1}{n^2-40n+410}:n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf D=$ .... $\sup D=$ ....

633. $E=\left\{\frac{1}{n^2-40n+430}:n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf E=$ .... $\sup E=$ ....

634. $F=\left\{\frac{m}{n}:m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 3^{n^2}\leqslant 2^{m^2}\leqslant 5^{n^2}\right\}$ $\inf F=$ .... $\sup F=$ ....

635. $G=\left\{\frac{m}{n}:m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 4^{n^2}\leqslant 2^{m^2}\leqslant 8^{n^2}\right\}$ $\inf G=$ .... $\sup G=$ ....

636. $H=\left\{\frac{m}{n}:m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 9^{n^2}\leqslant 3^{m^2}\leqslant 27^{n^2}\right\}$ $\inf H=$ .... $\sup H=$ ....

637. $I=\left\{\frac{m}{n}:m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 16^{n^2}\leqslant 2^{m^2}\leqslant 32^{n^2}\right\}$ $\inf I=$ .... $\sup I=$ ....

638. $J=\left\{\frac{m}{n}:m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 27^{n^2}\leqslant 3^{m^2}\leqslant 81^{n^2}\right\}$ $\inf J=$ .... $\sup J=$ ....

639. Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$\left\{\frac{1}{m^2-3n^2}:m,n\in\mathbb{N}\right\}.$$

640. Podać przykład takiego niepustego zbioru ograniczonego A, że $0<\sup A<1$ oraz $\sup\{a^2: a\in A\}=\sup A$.

641. Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$Z=\left\{\frac{k\cdot m^2\cdot n^3}{k^3+m^6+n^9}:k,m,n\in\mathbb{N}\right\}.$$

642. Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$Z=\left\{\frac{mn}{4m^2+9n^2}:m,n\in\mathbb{N}\right\}.$$

6. Szeregi liczbowe – podstawy

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 29.11,2.12.2016 (grupa 1 *lux*).
Zadania z rozwiązaniami.

643. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^3=\frac{7}{2}.$$

644. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = 1\,.$$

645. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że sumy szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^3, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4$$

są liczbami całkowitymi.

646. Podać przykład takiego ciągu (a_n), że szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n-2}+a_{3n-1}+a_{3n}), \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n-1}+a_{3n}+a_{3n+1}) \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n}+a_{3n+1}+a_{3n+2})$$

są zbieżne, a ponadto

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n-2}+a_{3n-1}+a_{3n}) = 6, \qquad a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n-1}+a_{3n}+a_{3n+1}) = 1$$

oraz

$$a_1 + a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n}+a_{3n+1}+a_{3n+2}) = 3\,.$$

647. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}\,.$$

648. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3+(-1)^n)^n}\,.$$

649. Podać przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach nieujemnych i sumie równej 1, że dla nieskończenie wielu liczb naturalnych n zachodzi równość $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

650. Rozstrzygnąć zbieżność szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{5n^7+4n^4-1}}{5n^5-4n^4+1} \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{5n^8+4n^4-1}}{5n^5-4n^4+1}\,.$$

651. Dany jest zbieżny szereg geometryczny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o sumie S. Wiadomo, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = T\,.$$

Wyznaczyć sumę szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ w zależności od S i T.

652. Obliczyć sumę szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n}.$$

653. Podać przykład takiego ciągu (a_n), że szeregi
$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n-2}+a_{3n-1}+a_{3n}), \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n-1}+a_{3n}+a_{3n+1}) \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n}+a_{3n+1}+a_{3n+2})$$
są zbieżne, a ponadto
$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n-2}+a_{3n-1}+a_{3n})=1, \qquad a_1+\sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n-1}+a_{3n}+a_{3n+1})=4$$
oraz
$$a_1+a_2+\sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n}+a_{3n+1}+a_{3n+2})=9.$$

654. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **wymiernych dodatnich**, że jego suma jest liczbą wymierną, a ponadto zachodzi równość
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4.$$
Dla podanego przykładu obliczyć wartości sum $S_1=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $S_2=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ oraz $S_4=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^4$.

655. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **wymiernych dodatnich**, że sumy $S_1=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $S_2=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ oraz $S_4=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^4$ są liczbami całkowitymi, a ponadto zachodzi równość $S_2=S_4$. Dla podanego przykładu podać wartości sum S_1, S_2 i S_4.

Wskazówka: Nie istnieje czysty szereg geometryczny spełniający warunki zadania, ale przykład można skonstruować odpowiednio modyfikując szereg geometryczny.

656. Obliczyć sumę szeregu
$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^3-4n}.$$

657. Obliczyć sumę szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+5n}.$$

658. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **wymiernych dodatnich**, że zachodzi równość
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^3.$$
Dla podanego przykładu obliczyć wartości sum $S_1=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ oraz $S_3=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^3$.