585. Wskaż liczbę rzeczywistą k, dla której podana granica istnieje i jest dodatnią liczbą rzeczywistą. Podaj wartość granicy dla tej wartości parametru k. Jeżeli odpowiedź jest liczbą wymierną, podaj ją w postaci ułamka nieskracalnego lub liczby całkowitej.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\binom{n}{3}\right)=\mathbf{1/6}$ dla $k=\mathbf{-3}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\binom{n+4}{n}\right)=\mathbf{1/24}$ dla $k=\mathbf{-4}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\binom{2n}{4}\right)=\mathbf{2/3}$ dla $k=\mathbf{-4}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\binom{2n+2}{5}\right)=\mathbf{4/15}$ dla $k=\mathbf{-5}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\binom{2n+2015}{6}\right)=\mathbf{4/45}$ dla $k=\mathbf{-6}$

586. Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{n^4+n}}+\frac{n+1}{\sqrt{n^4+n+1}}+\frac{n+2}{\sqrt{n^4+n+2}}+\frac{n+3}{\sqrt{n^4+n+3}}+\ldots+\frac{9n}{\sqrt{n^4+9n}}\right).$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez b_n. Zamierzamy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach, co wymaga oszacowania b_n od góry i od dołu przez ciągi zbieżne do wspólnej granicy.

Zauważmy, że składniki tej sumy bardzo się różnią – iloraz ostatniego składnika do pierwszego dąży do 9 przy n dążącym do nieskończoności. Należy zatem oczekiwać, że oszacowanie sumy poprzez wspólne oszacowanie składników (i przemnożenie tego oszacowania przez liczbę składników), będzie prowadzić do oszacowań mających różne granice, co uniemożliwi skorzystanie z twierdzenia o trzech ciągach.

Zauważmy też, że za tak znaczną różnicę wielkości składników odpowiadają liczniki, podczas gdy mianowniki mają zbliżoną wielkość. Liczniki tworzą jednak postęp arytmetyczny, którego sumę bez problemu możemy obliczyć. W konsekwencji będziemy szacować mianowniki przez wspólną wielkość, nie zmieniając liczników, a następnie dodamy składniki powstałe w wyniku tego oszacowania.

I tak, szacowanie od góry (czyli szacowanie mianowników od dołu) prowadzi do

$$b_n\leqslant\frac{n}{\sqrt{n^4+n}}+\frac{n+1}{\sqrt{n^4+n}}+\frac{n+2}{\sqrt{n^4+n}}+\frac{n+3}{\sqrt{n^4+n}}+\ldots+\frac{9n}{\sqrt{n^4+n}}=$$
$$=\frac{n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+\ldots+9n}{\sqrt{n^4+n}}=c_n$$

Z kolei szacowanie od dołu (czyli szacowanie mianowników od góry) prowadzi do

$$b_n\geqslant\frac{n}{\sqrt{n^4+9n}}+\frac{n+1}{\sqrt{n^4+9n}}+\frac{n+2}{\sqrt{n^4+9n}}+\frac{n+3}{\sqrt{n^4+9n}}+\ldots+\frac{9n}{\sqrt{n^4+9n}}=$$
$$=\frac{n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+\ldots+9n}{\sqrt{n^4+9n}}=a_n\,.$$

Ze wzoru na sumę postępu arytmetycznego otrzymujemy

$$n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+\ldots+9n=(8n+1)\cdot\frac{n+9n}{2}=5n\cdot(8n+1)\,,$$

gdzie $8n+1$ jest liczbą wyrazów powyższego postępu.

Wobec tego

$$c_n=\frac{5n\cdot(8n+1)}{\sqrt{n^4+n}}=\frac{5\cdot\left(8+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}}\to 40$$

przy $n\to\infty$ i podobnie

$$a_n=\frac{5n\cdot(8n+1)}{\sqrt{n^4+9n}}=\frac{5\cdot\left(8+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{1+\frac{9}{n^3}}}\to 40\,.$$

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$a_n\leqslant b_n\leqslant c_n\,,$$

a ponadto

$$\lim_{n\to\infty}c_n=40$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty}a_n=40\,,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}b_n=40\,.$$

Odpowiedź: Wartość granicy podanej w treści zadania jest równa 40.

587. Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2}{n^3}+\frac{4n^2+n}{n^3+1}+\frac{4n^2+2n}{n^3+2}+\frac{4n^2+3n}{n^3+3}+\frac{4n^2+4n}{n^3+4}+\ldots+\frac{9n^2-n}{n^3+5n-1}+\frac{9n^2}{n^3+5n}\right).$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez b_n. Zamierzamy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach, co wymaga oszacowania b_n od góry i od dołu przez ciągi zbieżne do wspólnej granicy.

Zauważmy, że składniki tej sumy bardzo się różnią – iloraz ostatniego składnika do pierwszego dąży do 9/4 przy n dążącym do nieskończoności. Należy zatem oczekiwać, że oszacowanie sumy poprzez wspólne oszacowanie składników (i przemnożenie tego oszacowania przez liczbę składników), będzie prowadzić do oszacowań mających różne granice, co uniemożliwi skorzystanie z twierdzenia o trzech ciągach.

Zauważmy też, że za tak znaczną różnicę wielkości składników odpowiadają liczniki, podczas gdy mianowniki mają zbliżoną wielkość. Liczniki tworzą jednak postęp arytmetyczny, którego sumę bez problemu możemy obliczyć. W konsekwencji będziemy szacować mianowniki przez wspólną wielkość, nie zmieniając liczników, a następnie dodamy składniki powstałe w wyniku tego oszacowania.

I tak, szacowanie od góry (czyli szacowanie mianowników od dołu) prowadzi do

$$b_n \leqslant \frac{4n^2}{n^3}+\frac{4n^2+n}{n^3}+\frac{4n^2+2n}{n^3}+\ldots+\frac{9n^2}{n^3}=\frac{4n}{n^2}+\frac{4n+1}{n^2}+\frac{4n+2}{n^2}+\ldots+\frac{9n}{n^2}=$$

$$=\frac{4n+(4n+1)+(4n+2)+\ldots+9n}{n^2}=c_n$$

Z kolei szacowanie od dołu (czyli szacowanie mianowników od góry) prowadzi do

$$b_n \geqslant \frac{4n^2}{n^3+5n}+\frac{4n^2+n}{n^3+5n}+\frac{4n^2+2n}{n^3+5n}+\ldots+\frac{9n^2}{n^3+5n}=$$

$$=\frac{4n}{n^2+5}+\frac{4n+1}{n^2+5}+\frac{4n+2}{n^2+5}+\ldots+\frac{9n}{n^2+5}=\frac{4n+(4n+1)+(4n+2)+\ldots+9n}{n^2+5}=a_n\,.$$

Ze wzoru na sumę postępu arytmetycznego otrzymujemy

$$4n+(4n+1)+(4n+2)+\ldots+9n=(5n+1)\cdot\frac{4n+9n}{2}=\frac{13n\cdot(5n+1)}{2}\,,$$

gdzie $5n+1$ jest liczbą wyrazów powyższego postępu.

Wobec tego

$$c_n=\frac{13n\cdot(5n+1)}{2n^2}=\frac{13\cdot\left(5+\frac{1}{n}\right)}{2}\to\frac{65}{2}$$

przy $n\to\infty$ i podobnie

$$a_n=\frac{13n\cdot(5n+1)}{2n^2+10}=\frac{13\cdot\left(5+\frac{1}{n}\right)}{\left(2+\frac{10}{n^2}\right)}\to\frac{65}{2}\,.$$

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$a_n\leqslant b_n\leqslant c_n\,,$$

a ponadto

$$\lim_{n\to\infty} c_n=\frac{65}{2}$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\frac{65}{2}\,,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} b_n=\frac{65}{2}\,.$$

Odpowiedź: Wartość granicy podanej w treści zadania jest równa 65/2.

588. Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\binom{n}{0}}{\sqrt{4^n+1}}+\frac{\binom{n}{1}}{\sqrt{4^n+3}}+\frac{\binom{n}{2}}{\sqrt{4^n+9}}+\frac{\binom{n}{3}}{\sqrt{4^n+27}}+\ldots+\frac{\binom{n}{n-1}}{\sqrt{4^n+3^{n-1}}}+\frac{\binom{n}{n}}{\sqrt{4^n+3^n}}\right).$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez b_n. Zamierzamy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach, co wymaga oszacowania b_n od góry i od dołu przez ciągi zbieżne do wspólnej granicy.

Zauważmy, że składniki tej sumy bardzo się różnią – ilorazy środkowych składników do skrajnych dążą do nieskończoności przy n dążącym do nieskończoności. Należy zatem oczekiwać, że oszacowanie sumy poprzez wspólne oszacowanie składników (i przemnożenie tego oszacowania przez liczbę składników), będzie prowadzić do oszacowań mających różne granice, co uniemożliwi skorzystanie z twierdzenia o trzech ciągach.

Zauważmy też, że za tak znaczną różnicę wielkości składników odpowiadają liczniki, podczas gdy mianowniki mają zbliżoną wielkość. Liczniki tworzą jednak n-ty wiersz trójkąta Pascala, a więc ich sumę bez problemu możemy obliczyć. W konsekwencji będziemy szacować mianowniki przez wspólną wielkość, nie zmieniając liczników, a następnie dodamy składniki powstałe w wyniku tego oszacowania.

I tak, szacowanie od góry (czyli szacowanie mianowników od dołu) prowadzi do

$$b_n \leqslant \frac{\binom{n}{0}}{\sqrt{4^n+0}}+\frac{\binom{n}{1}}{\sqrt{4^n+0}}+\frac{\binom{n}{2}}{\sqrt{4^n+0}}+\frac{\binom{n}{3}}{\sqrt{4^n+0}}+\ldots+\frac{\binom{n}{n-1}}{\sqrt{4^n+0}}+\frac{\binom{n}{n}}{\sqrt{4^n+0}}=$$

$$=\frac{\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}}{2^n}=c_n$$

Z kolei szacowanie od dołu (czyli szacowanie mianowników od góry) prowadzi do

$$b_n \geqslant \frac{\binom{n}{0}}{\sqrt{4^n+3^n}}+\frac{\binom{n}{1}}{\sqrt{4^n+3^n}}+\frac{\binom{n}{2}}{\sqrt{4^n+3^n}}+\frac{\binom{n}{3}}{\sqrt{4^n+3^n}}+\ldots+\frac{\binom{n}{n-1}}{\sqrt{4^n+3^n}}+\frac{\binom{n}{n}}{\sqrt{4^n+3^n}}=$$

$$=\frac{\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}}{\sqrt{4^n+3^n}}=a_n\,.$$

Ze wzoru na sumę wyrazów n-tego wiersza trójkąta Pascala otrzymujemy

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n\,.$$

Wobec tego

$$c_n=\frac{2^n}{2^n}=1\to 1$$

przy $n\to\infty$ i podobnie

$$a_n=\frac{2^n}{\sqrt{4^n+3^n}}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n}}\to 1\,.$$

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$a_n\leqslant b_n\leqslant c_n\,,$$

a ponadto

$$\lim_{n\to\infty} c_n=1$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} a_n=1\,,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} b_n=1\,.$$

Odpowiedź: Wartość granicy podanej w treści zadania jest równa 1.

589. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{4n^2+1}+\sqrt{9n^2+1}+\sqrt{16n^2+1}+\sqrt{25n^2+1}+\sqrt{36n^2+1}+\ldots+\sqrt{n^4+1}}{n^k}$$

dla tak dobranej wartości naturalnej parametru k, aby granica ta była liczbą rzeczywistą dodatnią.

Rozwiązanie:

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez b_n. Zamierzamy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach, co wymaga oszacowania b_n od góry i od dołu przez ciągi zbieżne do wspólnej granicy.

Zauważmy, że składniki sumy występującej w liczniku bardzo się różnią – iloraz pierwszego składnika do ostatniego dąży do 0 przy n dążącym do nieskończoności. Należy zatem oczekiwać, że oszacowanie sumy poprzez wspólne oszacowanie składników (i przemnożenie tego oszacowania przez liczbę składników), będzie prowadzić do oszacowań mających różne granice, co uniemożliwi skorzystanie z twierdzenia o trzech ciągach.

Staramy się więc tak oszacować poszczególne składniki, aby po pierwsze oszacowanie nie było zbyt grube, a po drugie, aby można było się pozbyć pierwiastków.

I tak, delikatne szacowanie od dołu prowadzi do sumy postępu arytmetycznego w liczniku:

$$b_n \geqslant \frac{\sqrt{n^2+0}+\sqrt{4n^2+0}+\sqrt{9n^2+0}+\sqrt{16n^2+0}+\sqrt{25n^2+0}+\ldots+\sqrt{n^4+0}}{n^k}=$$

$$=\frac{n+2n+3n+4n+5n+\ldots+n^2}{n^k}=\frac{n\cdot\frac{n+n^2}{2}}{n^k}=\frac{1+\frac{1}{n}}{2\cdot n^{k-3}}=a_n\to\frac{1}{2}$$

przy $n\to\infty$ dla $k=3$.

Oszacowanie od góry przeprowadzamy według schematu $\sqrt{x^2+1}\leqslant\sqrt{x^2+2x+1}$ otrzymując kolejno:

$$b_n\leqslant\frac{\sqrt{n^2+2n+1}+\sqrt{4n^2+4n+1}+\sqrt{9n^2+6n+1}+\ldots+\sqrt{n^4+2n^2+1}}{n^k}=$$

$$=\frac{(n+1)+(2n+1)+(3n+1)+\ldots+(n^2+1)}{n^k}=\frac{n\cdot\frac{(n+1)+\left(n^2+1\right)}{2}}{n^k}=\frac{1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{2\cdot n^{k-3}}=c_n\to\frac{1}{2}$$

przy $n\to\infty$ dla $k=3$.

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$a_n\leqslant b_n\leqslant c_n\,,$$

a ponadto

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty}c_n=\frac{1}{2}\,,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2}\,.$$

Odpowiedź: Wartość granicy podanej w treści zadania jest równa 1/2 dla $k=3$.

590. Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+2}+\sqrt{16+16}+\sqrt{2^8+2^7}+\sqrt{2^{12}+2^{10}}+\sqrt{2^{16}+2^{13}}+\ldots+\sqrt{2^{4n}+2^{3n+1}}}{4^n+1}\,.$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy wyrażenie występujące pod znakiem granicy przez b_n. Zamierzamy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach, co wymaga oszacowania b_n od góry i od dołu przez ciągi zbieżne do wspólnej granicy.

Zauważmy, że składniki sumy występującej w liczniku bardzo się różnią – iloraz ostatniego składnika do pierwszego dąży do nieskończoności przy n dążącym do nieskończoności. Należy zatem oczekiwać, że oszacowanie sumy poprzez wspólne oszacowanie składników (i przemnożenie tego oszacowania przez liczbę składników), będzie prowadzić do oszacowań mających różne granice, co uniemożliwi skorzystanie z twierdzenia o trzech ciągach.

Oszacujmy więc każdy składnik z osobna.

Szacując licznik od góry otrzymujemy

$$\sqrt{1+2}+\sqrt{16+16}+\sqrt{2^8+2^7}+\sqrt{2^{12}+2^{10}}+\ldots+\sqrt{2^{4n}+2^{3n+1}} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{1+2+1}+\sqrt{16+16+4}+\sqrt{2^8+2^7+2^4}+\sqrt{2^{12}+2^{10}+2^6}+\ldots+\sqrt{2^{4n}+2^{3n+1}+2^{2n}} =$$
$$= \sqrt{(1+1)^2}+\sqrt{(4+2)^2}+\sqrt{\left(2^4+2^2\right)^2}+\sqrt{\left(2^6+2^3\right)^2}+\ldots+\sqrt{\left(2^{2n}+2^n\right)^2} =$$
$$= (1+1)+(4+2)+\left(2^4+2^2\right)+\left(2^6+2^3\right)+\ldots+\left(2^{2n}+2^n\right) =$$
$$= 1+4+4^2+4^3+\ldots+4^n+1+2+2^2+2^3+\ldots+2^n = \frac{4^{n+1}-1}{3}+2^{n+1}-1\,.$$

Z kolei szacowanie licznika od dołu prowadzi do

$$\sqrt{1+2}+\sqrt{16+16}+\sqrt{2^8+2^7}+\sqrt{2^{12}+2^{10}}+\ldots+\sqrt{2^{4n}+2^{3n+1}} \geqslant$$
$$\geqslant \sqrt{1+0}+\sqrt{16+0}+\sqrt{2^8+0}+\sqrt{2^{12}+0}+\ldots+\sqrt{2^{4n}+0} =$$
$$= 1+4+4^2+4^3+\ldots+4^n = \frac{4^{n+1}-1}{3}\,.$$

Z powyższych nierówności wynikają oszacowania wyrazów wyjściowego ciągu:

$$b_n \leqslant \frac{\frac{4^{n+1}-1}{3}+2^{n+1}-1}{4^n+1} = c_n$$

oraz

$$b_n \geqslant \frac{\frac{4^{n+1}-1}{3}}{4^n+1} = a_n\,.$$

Obliczamy granice ciągów (a_n) i (c_n) dzieląc licznik i mianownik przez $4^n/3$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4^{n+1}-1}{3}}{4^n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{4-4^{-n}}{3\cdot(1+4^{-n})} = \frac{4-0}{3\cdot(1+0)} = \frac{4}{3}$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4^{n+1}-1}{3}+2^{n+1}-1}{4^n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{4-4^{-n}+6\cdot 2^{-n}-3\cdot 4^{-n}}{3\cdot(1+4^{-n})} = \frac{4-0+6\cdot 0-3\cdot 0}{3\cdot(1+0)} = \frac{4}{3}\,.$$

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n\,,$$

a ponadto

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \frac{4}{3}$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{4}{3}\,,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{4}{3}\,.$$

Odpowiedź: Wartość granicy podanej w treści zadania jest równa $4/3$.

591. Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{1+1}}{\sqrt{n^{24}+1}}+\frac{\sqrt{1+2^6}}{\sqrt{n^{24}+2^6}}+\frac{\sqrt{1+3^6}}{\sqrt{n^{24}+3^6}}+\ldots+\frac{\sqrt{1+k^6}}{\sqrt{n^{24}+k^6}}+\ldots+\frac{\sqrt{1+n^{18}}}{\sqrt{n^{24}+n^{18}}}\right).$$

Wskazówka-przypomnienie: $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\dfrac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}$.

Rozwiązanie:

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez b_n. Zamierzamy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach, co wymaga oszacowania b_n od góry i od dołu przez ciągi zbieżne do wspólnej granicy.

Zauważmy, że składniki tej sumy bardzo się różnią – iloraz ostatniego składnika do pierwszego dąży do nieskończoności przy n dążącym do nieskończoności. Należy zatem oczekiwać, że oszacowanie sumy poprzez wspólne oszacowanie składników (i przemnożenie tego oszacowania przez liczbę składników), będzie prowadzić do oszacowań mających różne granice, co uniemożliwi skorzystanie z twierdzenia o trzech ciągach.

Zauważmy też, że za tak znaczną różnicę wielkości składników odpowiadają liczniki, podczas gdy mianowniki mają zbliżoną wielkość. Będziemy więc szacować każdy składnik z osobna: mianowniki przez wspólną wielkość, a liczniki przez możliwie proste wyrażenia, które później uda się wysumować.

Szacowanie od dołu prowadzi do:

$$b_n=\frac{\sqrt{1+1}}{\sqrt{n^{24}+1}}+\frac{\sqrt{1+2^6}}{\sqrt{n^{24}+2^6}}+\frac{\sqrt{1+3^6}}{\sqrt{n^{24}+3^6}}+\ldots+\frac{\sqrt{1+k^6}}{\sqrt{n^{24}+k^6}}+\ldots+\frac{\sqrt{1+n^{18}}}{\sqrt{n^{24}+n^{18}}}\geqslant$$

$$\geqslant \frac{\sqrt{0+1}}{\sqrt{n^{24}+n^{18}}}+\frac{\sqrt{0+2^6}}{\sqrt{n^{24}+n^{18}}}+\frac{\sqrt{0+3^6}}{\sqrt{n^{24}+n^{18}}}+\ldots+\frac{\sqrt{0+k^6}}{\sqrt{n^{24}+n^{18}}}+\ldots+\frac{\sqrt{0+n^{18}}}{\sqrt{n^{24}+n^{18}}}=$$

$$=\frac{1+2^3+3^3+\ldots+n^9}{\sqrt{n^{24}+n^{18}}}=\frac{\frac{n^6\cdot\left(n^3+1\right)^2}{4}}{\sqrt{n^{24}+n^{18}}}=\frac{n^6\cdot\left(n^3+1\right)^2}{4\cdot\sqrt{n^{24}+n^{18}}}=a_n\,.$$

Z kolei szacując od góry otrzymujemy:

$$b_n=\frac{\sqrt{1+1}}{\sqrt{n^{24}+1}}+\frac{\sqrt{1+2^6}}{\sqrt{n^{24}+2^6}}+\frac{\sqrt{1+3^6}}{\sqrt{n^{24}+3^6}}+\ldots+\frac{\sqrt{1+k^6}}{\sqrt{n^{24}+k^6}}+\ldots+\frac{\sqrt{1+n^{18}}}{\sqrt{n^{24}+n^{18}}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\sqrt{1+2+1}}{\sqrt{n^{24}+0}}+\frac{\sqrt{1+2\cdot2^3+2^6}}{\sqrt{n^{24}+0}}+\frac{\sqrt{1+2\cdot3^3+3^6}}{\sqrt{n^{24}+0}}+\ldots+\frac{\sqrt{1+2\cdot k^3+k^6}}{\sqrt{n^{24}+0}}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{\sqrt{1+2\cdot n^9+n^{18}}}{\sqrt{n^{24}+0}}=\frac{(1+1)+(1+2^3)+(1+3^3)+\ldots+(1+n^9)}{n^{12}}=$$

$$=\frac{n^3+\frac{n^6\cdot\left(n^3+1\right)^2}{4}}{n^{12}}=\frac{4n^3+n^6\cdot\left(n^3+1\right)^2}{4\cdot n^{12}}=c_n\,.$$

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności $a_n\leqslant b_n\leqslant c_n$, a ponadto przy $n\to\infty$ mamy

$$a_n=\frac{n^6\cdot\left(n^3+1\right)^2}{4\cdot\sqrt{n^{24}+n^{18}}}=\frac{\left(1+n^{-3}\right)^2}{4\cdot\sqrt{1+n^{-6}}}\to\frac{1}{4}$$

oraz

$$c_n=\frac{4n^3+n^6\cdot\left(n^3+1\right)^2}{4\cdot n^{12}}=\frac{4n^{-9}+\left(1+n^{-3}\right)^2}{4}\to\frac{1}{4}\,,$$

z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że dana w zadaniu granica jest równa 1/4.

592. Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n}{\sqrt{9^n+5^n}}+\frac{2^{n-1}\cdot3}{\sqrt{9^n+5^{n-1}\cdot7}}+\frac{2^{n-2}\cdot3^2}{\sqrt{9^n+5^{n-2}\cdot7^2}}+\ldots+\frac{2^{n-k}\cdot3^k}{\sqrt{9^n+5^{n-k}\cdot7^k}}+\ldots+\frac{3^n}{\sqrt{9^n+7^n}}\right).$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez b_n. Zamierzamy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach, co wymaga oszacowania b_n od góry i od dołu przez ciągi zbieżne do wspólnej granicy.

Zauważmy, że składniki tej sumy bardzo się różnią – iloraz ostatniego składnika do pierwszego dąży do nieskończoności przy n dążącym do nieskończoności. Należy zatem oczekiwać, że oszacowanie sumy poprzez wspólne oszacowanie składników (i przemnożenie tego oszacowania przez liczbę składników) będzie prowadzić do oszacowań mających różne granice, co uniemożliwi skorzystanie z twierdzenia o trzech ciągach.

Zauważmy też, że za tak znaczną różnicę wielkości składników odpowiadają liczniki, podczas gdy mianowniki mają zbliżoną wielkość. Będziemy więc szacować każdy składnik z osobna: mianowniki oszacujemy przez wspólną wielkość, a liczniki, które tworzą postęp geometryczny, pozostawimy bez zmian.

Szacowanie od dołu (mianowniki od góry) prowadzi do:

$$b_n=\frac{2^n}{\sqrt{9^n+5^n}}+\frac{2^{n-1}\cdot 3}{\sqrt{9^n+5^{n-1}\cdot 7}}+\frac{2^{n-2}\cdot 3^2}{\sqrt{9^n+5^{n-2}\cdot 7^2}}+\ldots+\frac{2^{n-k}\cdot 3^k}{\sqrt{9^n+5^{n-k}\cdot 7^k}}+\ldots+\frac{3^n}{\sqrt{9^n+7^n}}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{2^n}{\sqrt{9^n+7^n}}+\frac{2^{n-1}\cdot 3}{\sqrt{9^n+7^n}}+\frac{2^{n-2}\cdot 3^2}{\sqrt{9^n+7^n}}+\ldots+\frac{2^{n-k}\cdot 3^k}{\sqrt{9^n+7^n}}+\ldots+\frac{3^n}{\sqrt{9^n+7^n}}=$$

$$=\frac{2^n+2^{n-1}\cdot 3+2^{n-2}\cdot 3^2+\ldots+2^{n-k}\cdot 3^k+\ldots+3^n}{\sqrt{9^n+7^n}}=a_n\,.$$

Z kolei szacując od góry (mianowniki od dołu) otrzymujemy:

$$b_n=\frac{2^n}{\sqrt{9^n+5^n}}+\frac{2^{n-1}\cdot 3}{\sqrt{9^n+5^{n-1}\cdot 7}}+\frac{2^{n-2}\cdot 3^2}{\sqrt{9^n+5^{n-2}\cdot 7^2}}+\ldots+\frac{2^{n-k}\cdot 3^k}{\sqrt{9^n+5^{n-k}\cdot 7^k}}+\ldots+\frac{3^n}{\sqrt{9^n+7^n}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2^n}{\sqrt{9^n+0}}+\frac{2^{n-1}\cdot 3}{\sqrt{9^n+0}}+\frac{2^{n-2}\cdot 3^2}{\sqrt{9^n+0}}+\ldots+\frac{2^{n-k}\cdot 3^k}{\sqrt{9^n+0}}+\ldots+\frac{3^n}{\sqrt{9^n+0}}=$$

$$=\frac{2^n+2^{n-1}\cdot 3+2^{n-2}\cdot 3^2+\ldots+2^{n-k}\cdot 3^k+\ldots+3^n}{3^n}=c_n\,.$$

W licznikach uzyskanych oszacowań występuje suma tego samego postępu geometrycznego $n+1$-wyrazowego o pierwszym wyrazie 2^n i ilorazie $3/2$. Mamy więc

$$2^n+2^{n-1}\cdot 3+2^{n-2}\cdot 3^2+\ldots+2^{n-k}\cdot 3^k+\ldots+3^n=2^n\cdot\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}-1}{\frac{3}{2}-1}=3^{n+1}-2^{n+1}\,.$$

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności $a_n\leqslant b_n\leqslant c_n$, a ponadto przy $n\to\infty$ mamy

$$a_n=\frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{\sqrt{9^n+7^n}}=\frac{3-2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\sqrt{1+\left(\frac{7}{9}\right)^n}}\to 3$$

oraz

$$c_n=\frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{3^n}=3-2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n\to 3\,,$$

z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że dana w zadaniu granica jest równa 3.

W każdym z poniższych zadań podaj kresy zbioru oraz określ, czy kresy należą do zbioru.

624. $A=\left\{\frac{1}{n^2-44}:n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf A=$ **$-1/8$ (TAK)** $\sup A=$ **$1/5$ (TAK)**

625. $B=\left\{\frac{(-1)^n}{n^2+44}:n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf B=$ **$-1/45$ (TAK)** $\sup B=$ **$1/48$ (TAK)**

626. $C=\left\{\frac{(-1)^n}{n^2-44}:n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf C=$ **$-1/5$ (TAK)** $\sup C=$ **$1/19$ (TAK)**

627. $D=\left\{\left(\frac{-1}{3}\right)^n:n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf D=$ **$-1/3$ (TAK)** $\sup D=$ **$1/9$ (TAK)**

628. $E=\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{3^i}:n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf E=\mathbf{1/3}$ (**TAK**) $\sup E=\mathbf{1/2}$ (**NIE**)

629. $A=\left\{\frac{1}{n^2-40n+350}:n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf A=\mathbf{-1}$ (**TAK**) $\sup A=\mathbf{1/14}$ (**TAK**)

630. $B=\left\{\frac{1}{n^2-40n+370}:n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf B=\mathbf{-1/5}$ (**TAK**) $\sup B=\mathbf{1/6}$ (**TAK**)

631. $C=\left\{\frac{1}{n^2-40n+390}:n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf C=\mathbf{-1}$ (**TAK**) $\sup C=\mathbf{1/6}$ (**TAK**)

632. $D=\left\{\frac{1}{n^2-40n+410}:n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf D=\mathbf{0}$ (**NIE**) $\sup D=\mathbf{1/10}$ (**TAK**)

633. $E=\left\{\frac{1}{n^2-40n+430}:n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf E=\mathbf{0}$ (**NIE**) $\sup E=\mathbf{1/30}$ (**TAK**)

634. $F=\left\{\frac{m}{n}:m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 3^{n^2}\leqslant 2^{m^2}\leqslant 5^{n^2}\right\}$
$\inf F=\sqrt{\mathbf{log_2 3}}$ (**NIE**) $\sup F=\sqrt{\mathbf{log_2 5}}$ (**NIE**)

635. $G=\left\{\frac{m}{n}:m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 4^{n^2}\leqslant 2^{m^2}\leqslant 8^{n^2}\right\}$ $\inf G=\sqrt{\mathbf{2}}$ (**NIE**) $\sup G=\sqrt{\mathbf{3}}$ (**NIE**)

636. $H=\left\{\frac{m}{n}:m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 9^{n^2}\leqslant 3^{m^2}\leqslant 27^{n^2}\right\}$ $\inf H=\sqrt{\mathbf{2}}$ (**NIE**) $\sup H=\sqrt{\mathbf{3}}$ (**NIE**)

637. $I=\left\{\frac{m}{n}:m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 16^{n^2}\leqslant 2^{m^2}\leqslant 32^{n^2}\right\}$ $\inf I=\mathbf{2}$ (**TAK**) $\sup I=\sqrt{\mathbf{5}}$ (**NIE**)

638. $J=\left\{\frac{m}{n}:m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 27^{n^2}\leqslant 3^{m^2}\leqslant 81^{n^2}\right\}$ $\inf J=\sqrt{\mathbf{3}}$ (**NIE**) $\sup J=\mathbf{2}$ (**TAK**)

639. Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru
$$\left\{\frac{1}{m^2-3n^2}:m,n\in\mathbb{N}\right\}.$$
Rozwiązanie:

Każdy dodatni element zbioru jest postaci $1/k$, gdzie $k=m^2-3n^2>0$. Największy element otrzymamy dla najmniejszej możliwej dodatniej liczby k. Ponieważ liczba k jest całkowita dodatnia, musi zachodzić $k\geqslant 1$. Zauważmy przy tym, że dla $m=2$ i $n=1$ w istocie $k=1$. Zatem liczba 1 jest największym elementem zbioru.

Podobnie, każdy ujemny element zbioru jest postaci $1/k$, gdzie $k=m^2-3n^2<0$. Najmniejszy element otrzymamy dla największej możliwej ujemnej liczby k, czyli dla ujemnej liczby k o najmniejszym module. Ponieważ liczba k jest całkowita ujemna, a przy tym $k\not\equiv 2\pmod 3$, musi zachodzić $k\neq -1$. W konsekwencji $k\leqslant -2$. Zauważmy ponadto, że dla $m=n=1$ otrzymujemy $k=-2$. Zatem liczba $-1/2$ jest najmniejszym elementem zbioru.

W rozwiązaniu korzystamy z następującego faktu: *Kwadrat liczby całkowitej nigdy nie daje przy dzieleniu przez 3 reszty 2.* Na tej właśnie podstawie wnioskujemy, że

$$k=m^2-3n^2\equiv m^2\not\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 3)\,.$$

Odpowiedź: Kres dolny danego zbioru jest równy $-1/2$, a kres górny 1.

640. Podać przykład takiego niepustego zbioru ograniczonego A, że $0<\sup A<1$ oraz $\sup\{a^2: a\in A\}=\sup A$.

Rozwiązanie:

Przykładem zbioru spełniającego warunki zadania jest zbiór $A=\{-1/2, 1/4\}$. Wówczas $\sup A=1/4$, a przy tym zbiór $\{a^2: a\in A\}=\{1/16, 1/4\}$ również ma kres górny $1/4$.

641. Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$Z=\left\{\frac{k\cdot m^2\cdot n^3}{k^3+m^6+n^9} : k,m,n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Rozwiązanie:

Rozwiązanie zadania oprzemy na następujących spostrzeżeniach:

1° Wszystkie elementy zbioru Z są dodatnie.

2° Istnieje ciąg o wyrazach ze zbioru Z zbieżny do zera.
Dla dowodu tego spostrzeżenia wystarczy przyjąć $k=m=1$ w wyrażeniu

$$\frac{k\cdot m^2\cdot n^3}{k^3+m^6+n^9}\,. \tag{$\heartsuit$}$$

Otrzymamy wówczas

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{2+n^9}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\cdot n^{-3}+n^6}=0\,.$$

3° Liczba $1/3$ jest elementem zbioru Z.
Aby to zobaczyć, wystaczy podstawić $k=m=n=1$ w ($\heartsuit$).

4° Każdy element zbioru Z jest niewiększy od $1/3$.
Istotnie, z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną liczb k^3, m^6, n^9 otrzymujemy

$$\sqrt[3]{k^3\cdot m^6\cdot n^9}\leqslant\frac{k^3+m^6+n^9}{3}\,,$$

co łatwo przekształcamy do postaci

$$\frac{k\cdot m^2\cdot n^3}{k^3+m^6+n^9}\leqslant\frac{1}{3}\,.$$

Na podstawie spostrzeżeń **1**° i **2**° stwierdzamy, że $\inf Z=0$, a ze spostrzeżeń **3**° i **4**° wynika $\sup Z=1/3$

Odpowiedź: Kres dolny danego zbioru jest równy 0, a kres górny $1/3$.

642. Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$Z=\left\{\frac{mn}{4m^2+9n^2} : m,n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Rozwiązanie:

Rozwiązanie zadania oprzemy na następujących spostrzeżeniach:

1° Wszystkie elementy zbioru Z są dodatnie.

2° Istnieje ciąg o wyrazach ze zbioru Z zbieżny do zera.
Dla dowodu tego spostrzeżenia wystarczy przyjąć $m=1$ w wyrażeniu

$$\frac{mn}{4m^2+9n^2}. \qquad (\heartsuit)$$

Otrzymamy wówczas

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{4+9n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4\cdot n^{-1}+9n}=0.$$

3° Liczba $1/12$ jest elementem zbioru Z.
Aby to zobaczyć, wystaczy podstawić $m=3$ i $n=2$ w $(\heartsuit)$.

4° Każdy element zbioru Z jest niewiększy od $1/12$.
Istotnie, z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną liczb $4m^2$ i $9n^2$ otrzymujemy

$$\sqrt{4m^2\cdot 9n^2}\leqslant\frac{4m^2+9n^2}{2},$$

co łatwo przekształcamy do postaci

$$\frac{mn}{4m^2+9n^2}\leqslant\frac{1}{12}.$$

Na podstawie spostrzeżeń **1°** i **2°** stwierdzamy, że $\inf Z=0$, a ze spostrzeżeń **3°** i **4°** wynika $\sup Z=1/12$

Odpowiedź: Kres dolny danego zbioru jest równy 0, a kres górny 1/12.

643. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^3=\frac{7}{2}.$$

Rozwiązanie:

Spróbujemy znaleźć szereg geometryczny o żądanych własnościach.

W tym celu załóżmy, że $a_n=cq^{n-1}$, pamiętając, aby $c>0$ oraz $0<q<1$. Wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}cq^{n-1}=\frac{c}{1-q}$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^3=\sum_{n=1}^{\infty}c^3\left(q^3\right)^{n-1}=\frac{c^3}{1-q^3},$$

co po uwzględnieniu warunków zadania oraz prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} \dfrac{c}{1-q} = \dfrac{7}{2} \\ \dfrac{c^3}{1-q^3} = \dfrac{7}{2}\,, \end{cases} \tag{$\spadesuit$}$$

czyli

$$\begin{cases} 2c = 7(1-q) \\ 2c^3 = 7(1-q^3)\,. \end{cases}$$

Z pierwszego równania otrzymujemy

$$c = \frac{7(1-q)}{2}\,,$$

co po podstawieniu do drugiego równania daje kolejno

$$2\frac{7^3(1-q)^3}{2^3} = 7\left(1-q^3\right)$$

$$\frac{7^2(1-q)^3}{4} = 1-q^3$$

$$7^2(1-q)^3 = 4(1-q)\left(1+q+q^2\right)$$

$$7^2(1-q)^2 = 4\left(1+q+q^2\right)$$

$$49q^2 - 98q + 49 = 4q^2 + 4q + 4$$

$$45q^2 - 102q + 45 = 0 \tag{$\heartsuit$}$$

$$15q^2 - 34q + 15 = 0\,.$$

Otrzymane równanie kwadratowe ma rozwiązania

$$q = \frac{34 \pm \sqrt{34^2 - 4\cdot 15\cdot 15}}{30} = \frac{17 \pm \sqrt{17^2 - 15^2}}{15} = \frac{17 \pm \sqrt{(17-15)(17+15)}}{15} =$$

$$= \frac{17 \pm \sqrt{2\cdot 32}}{15} = \frac{17 \pm \sqrt{64}}{15} = \frac{17 \pm 8}{15}\,,$$

co wobec warunku $q < 1$ wymaga przyjęcia "$\pm$"="$-$". Ostatecznie otrzymujemy

$$q = \frac{17-8}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}\,,$$

skąd

$$c = \frac{7(1-q)}{2} = \frac{7}{5}\,.$$

Otrzymane rozwiązanie $q = 3/5$, $c = 7/5$ prowadzi do

$$a_n = cq^{n-1} = \frac{7\cdot 3^{n-1}}{5^n}\,.$$

Odpowiedź: Przykładem szeregu spełniającego warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7\cdot 3^{n-1}}{5^n}\,.$$

644. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = 1\,.$$

Rozwiązanie:

Spróbujemy znaleźć szereg geometryczny o żądanych własnościach.

W tym celu załóżmy, że $a_n = aq^{n-1}$, pamiętając, aby $a > 0$ oraz $0 < q < 1$. Wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a(-q)^{n-1} = \frac{a}{1+q}\,,$$

co prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} a = 3(1-q) \\ a = 1+q \end{cases}$$

mającego rozwiązanie $q = 1/2$, $a = 3/2$.

Odpowiedź: Przykładem szeregu spełniającego warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n}\,.$$

645. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że sumy szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^3, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4$$

są liczbami całkowitymi.

Rozwiązanie:

Rozważmy dowolny zbieżny szereg geometryczny o wyrazach wymiernych dodatnich, np. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

Wówczas sumy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 = \frac{1}{3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right)^3 = \frac{1}{7}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right)^4 = \frac{1}{15}$$

są liczbami wymiernymi.

Wystarczy teraz przemnożyć wyrazy wyjściowego szeregu geometrycznego przez najmniejszą wspólną wielokrotność mianowników powyższych sum, aby uzyskać przykład spełniający warunki zadania.

W naszym wypadku otrzymujemy

$$a_n = \frac{105}{2^n}$$

i w konsekwencji

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 105\,,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{105^2}{3} = 105 \cdot 35\,,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3 = \frac{105^3}{7} = 105^2 \cdot 15\,,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^4 = \frac{105^4}{15} = 105^3 \cdot 7\,.$$

646. Podać przykład takiego ciągu (a_n), że szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n-2}+a_{3n-1}+a_{3n}), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n-1}+a_{3n}+a_{3n+1}) \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n}+a_{3n+1}+a_{3n+2})$$

są zbieżne, a ponadto

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n-2}+a_{3n-1}+a_{3n}) = 6, \qquad a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n-1}+a_{3n}+a_{3n+1}) = 1$$

oraz

$$a_1 + a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n}+a_{3n+1}+a_{3n+2}) = 3\,.$$

Rozwiązanie:

Niech

$$a_1 = 1$$

oraz

$$a_{3n-1} = 2, \qquad a_{3n} = 3, \qquad a_{3n+1} = -5$$

dla $n \geqslant 1$.

Wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n-2}+a_{3n-1}+a_{3n}) = (1+2+3)+(-5+2+3)+(-5+2+3)+(-5+2+3)+\ldots =$$

$$= 6+0+0+0+\ldots = 6\,,$$

$$a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n-1}+a_{3n}+a_{3n+1}) = 1+(2+3-5)+(2+3-5)+(2+3-5)+\ldots =$$

$$= 1+0+0+0+\ldots = 1$$

oraz

$$a_1 + a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n}+a_{3n+1}+a_{3n+2}) = 1+2+(3-5+2)+(3-5+2)+(3-5+2)+\ldots =$$

$$= 3+0+0+0+\ldots = 3\,.$$

647. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}\,.$$

Rozwiązanie:

Szukamy takich liczb A i B, że

$$\frac{1}{n^2-1}=\frac{1}{(n-1)(n+1)}=\frac{A}{n-1}+\frac{B}{n+1}\,.$$

Po wymnożeniu prawej równości stronami przez $(n-1)(n+1)$ otrzymujemy

$$1=A(n+1)+B(n-1)\,.$$

Dla $n=1$ otrzymujemy $A=1/2$, natomiast przyjęcie $n=-1$ daje $B=-1/2$.

Zatem N-ta suma częściowa danego szeregu wyraża się wzorem

$$S_N=\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n^2-1}=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\left(\frac{1}{N-3}-\frac{1}{N-1}\right)+\left(\frac{1}{N-2}-\frac{1}{N}\right)+\left(\frac{1}{N-1}-\frac{1}{N+1}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{N}-\frac{1}{N+1}\right),$$

co przy N dążącym do $+\infty$ zbiega do $3/4$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg ma sumę równą $3/4$.

648. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3+(-1)^n)^n}\,.$$

Rozwiązanie:

Początek danego w zadaniu szeregu wygląda następująco

$$\frac{1}{2^1}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{4^6}+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{4^8}+\ldots$$

Ponieważ szereg ma wyrazy dodatnie, jego suma nie zmieni się przy zmianie kolejności sumowania jego wyrazów.

Zauważmy, że wyrazy o indeksach nieparzystych tworzą ciąg geometryczny o ilorazie $1/4$ i pierwszym wyrazie $1/2$. Ponieważ suma szeregu geometrycznego o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q, gdzie $|q|<1$, jest równa

$$\frac{a_1}{1-q}\,,$$

otrzymujemy

$$\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^7}+\ldots=\frac{1/2}{1-1/4}=\frac{2}{3}\,.$$

Podobnie, wyrazy o indeksach parzystych tworzą ciąg geometryczny o ilorazie $1/16$ i pierwszym wyrazie $1/16$. Przy tym

$$\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{4^6}+\frac{1}{4^8}+\ldots=\frac{1}{15}\,.$$

Suma danego w zadaniu szeregu jest więc równa

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{15}=\frac{11}{15}\,.$$

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg ma sumę równą $11/15$.

649. Podać przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach nieujemnych i sumie równej 1, że dla nieskończenie wielu liczb naturalnych n zachodzi równość $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Rozwiązanie:

Wystarczy przyjąć $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ dla $n \in \left\{4^k : k \in \mathbb{N}\right\}$ oraz $a_n = 0$ dla pozostałych n.

650. Rozstrzygnąć zbieżność szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{5n^7+4n^4-1}}{5n^5-4n^4+1} \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{5n^8+4n^4-1}}{5n^5-4n^4+1}\,.$$

Rozwiązanie:

Zastosujemy kryterium porównawcze, szacując pierwszy szereg od góry, a drugi od dołu. Otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{5n^7+4n^4-1}}{5n^5-4n^4+1} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{5n^7+4n^7-0}}{5n^5-4n^5+0} = 3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < +\infty$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{5n^8+4n^4-1}}{5n^5-4n^4+1} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{5n^8+0-n^8}}{5n^5-0+n^5} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty\,.$$

Odpowiedź: Pierwszy szereg jest zbieżny, a drugi rozbieżny.

651. Dany jest zbieżny szereg geometryczny $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o sumie S. Wiadomo, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = T\,.$$

Wyznaczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ w zależności od S i T.

Rozwiązanie:

Skorzystamy z następującego wzoru na sumę zbieżnego szeregu geometrycznego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o ilorazie q, gdzie $|q| < 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-q}\,.$$

Jeżeli dany w zadaniu szereg geometryczny $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ma iloraz q, to dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi równość $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. W konsekwencji

$$(-1)^n a_n = (-1)^n \cdot a_1 \cdot q^{n-1} = (-a_1) \cdot (-q)^{n-1}\,.$$

Zatem szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ jest szeregiem geometrycznym o pierwszym wyrazie $-a_1$ i ilorazie $-q$. Mamy więc

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = \frac{-a_1}{1-(-q)} = \frac{-a_1}{1+q}\,.$$

Podobnie
$$a_n^2=\left(a_1\cdot q^{n-1}\right)^2=\left(a_1^2\right)\cdot\left(q^2\right)^{n-1},$$
skąd wynika, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ jest szeregiem geometrycznym o pierwszym wyrazie a_1^2 i ilorazie q^2. Po uwzględnieniu założeń
$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{a_1}{1-q}=S \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n=\frac{-a_1}{1+q}=T$$
otrzymujemy
$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=\frac{a_1^2}{1-q^2}=\frac{a_1}{1-q}\cdot\frac{a_1}{1+q}=-\frac{a_1}{1-q}\cdot\frac{-a_1}{1+q}=-ST\,.$$

Odpowiedź: Suma szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ jest równa $-ST$.

652. Obliczyć sumę szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3n}\,.$$

Rozwiązanie:

Szukamy takich liczb A i B, że
$$\frac{1}{n^2+3n}=\frac{1}{n\cdot(n+3)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+3}\,.$$
Po wymnożeniu prawej równości stronami przez $n\cdot(n+3)$ otrzymujemy
$$1=A(n+3)+Bn\,.$$
Dla $n=0$ otrzymujemy $A=1/3$, natomiast przyjęcie $n=-3$ daje $B=-1/3$.

Zatem N-ta suma częściowa danego szeregu wyraża się wzorem
$$S_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2+3n}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right)=$$
$$=\frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\left(\frac{1}{N-3}-\frac{1}{N}\right)+\left(\frac{1}{N-2}-\frac{1}{N+1}\right)+\left(\frac{1}{N-1}-\frac{1}{N+2}\right)+\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{N+3}\right)\right)=$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{N+1}-\frac{1}{N+2}-\frac{1}{N+3}\right),$$
co przy N dążącym do $+\infty$ zbiega do $11/18$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg ma sumę równą $11/18$.

653. Podać przykład takiego ciągu (a_n), że szeregi
$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{3n-2}+a_{3n-1}+a_{3n}),\quad \sum_{n=1}^{\infty}(a_{3n-1}+a_{3n}+a_{3n+1}) \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(a_{3n}+a_{3n+1}+a_{3n+2})$$

są zbieżne, a ponadto

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{3n-2}+a_{3n-1}+a_{3n})=1, \qquad a_1+\sum_{n=1}^{\infty}(a_{3n-1}+a_{3n}+a_{3n+1})=4$$

oraz

$$a_1+a_2+\sum_{n=1}^{\infty}(a_{3n}+a_{3n+1}+a_{3n+2})=9\,.$$

Rozwiązanie:
Niech

$$a_1=4$$

oraz

$$a_{3n-1}=5, \qquad a_{3n}=-8, \qquad a_{3n+1}=3$$

dla $n\geqslant 1$.
Wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{3n-2}+a_{3n-1}+a_{3n})=(4+5-8)+(3+5-8)+(3+5-8)+(3+5-8)+\ldots=$$
$$=1+0+0+0+\ldots=1\,,$$

$$a_1+\sum_{n=1}^{\infty}(a_{3n-1}+a_{3n}+a_{3n+1})=4+(5-8+3)+(5-8+3)+(5-8+3)+\ldots=$$
$$=4+0+0+0+\ldots=4$$

oraz

$$a_1+a_2+\sum_{n=1}^{\infty}(a_{3n}+a_{3n+1}+a_{3n+2})=4+5+(-8+3+5)+(-8+3+5)+(-8+3+5)+\ldots=$$
$$=9+0+0+0+\ldots=9\,.$$

654. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ o wyrazach **wymiernych dodatnich**, że jego suma jest liczbą wymierną, a ponadto zachodzi równość

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^4\,.$$

Dla podanego przykładu obliczyć wartości sum $S_1=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $S_2=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ oraz $S_4=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^4$.

Rozwiązanie:
Spróbujemy znaleźć szereg geometryczny o żądanych własnościach.

W tym celu załóżmy, że $a_n=cq^{n-1}$, pamiętając, aby $c>0$ oraz $0<q<1$ były liczbami wymiernymi. Wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}cq^{n-1}=\frac{c}{1-q}$$

jest liczbą wymierną.

Ponadto
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c^2 \left(q^2\right)^{n-1} = \frac{c^2}{1-q^2}$$
oraz
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^4 = \sum_{n=1}^{\infty} c^4 \left(q^4\right)^{n-1} = \frac{c^4}{1-q^4}\,,$$
co sprowadza równość podaną w treści zadania do postaci
$$\frac{c^2}{1-q^2} = \frac{c^4}{1-q^4}\,. \qquad (\spadesuit)$$
Ponieważ
$$\frac{c^4}{1-q^4} = \frac{c^2}{1-q^2} \cdot \frac{c^2}{1+q^2}\,,$$
równanie ($\spadesuit$) można zapisać jako
$$\frac{c^2}{1+q^2} = 1\,,$$
czyli
$$c^2 = 1+q^2\,.$$

Konstrukcja przykładu będzie zakończona, jeśli znajdziemy taką liczbę wymierną dodatnią $q<1$, że liczba $1+q^2$ jest kwadratem liczby wymiernej.

Przyjmując $q=m/n$, gdzie $m<n$ są liczbami naturalnymi, otrzymujemy
$$c = \frac{\sqrt{m^2+n^2}}{n}\,.$$
Z równości $3^2+4^2=5^2$ wnioskujemy, że zdefiniowana wyżej liczba c jest wymierna dla $m=3$, $n=4$. Wówczas $q=3/4$ oraz $c=5/4$, a przy tym
$$S_1 = \frac{5/4}{1-3/4} = \frac{5/4}{1/4} = 5\,,$$
$$S_2 = \frac{25/16}{1-9/16} = \frac{25/16}{7/16} = \frac{25}{7}$$
oraz
$$S_4 = \frac{625/256}{1-81/256} = \frac{625/256}{(256-81)/256} = \frac{625}{256-81} = \frac{625}{175} = \frac{25}{7}\,.$$

Odpowiedź: Przykładem szeregu spełniającego warunki zadania jest szereg
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot 3^{n-1}}{4^n}\,,$$
a wartości sum wymienionych w treści zadania są równe $S_1=5$ oraz $S_2=S_4=25/7$.

Uwaga: Jeżeli ufamy w bezbłędność przeprowadzonych przez nas przekształceń, bezpośrednie wyliczanie S_4 nie jest konieczne, gdyż zaprezentowana metoda rozwiązania gwarantuje równość $S_2=S_4$. Jeśli jednak w rachunkach pojawił się błąd, a my nie przeprowadziliśmy uczciwie sugerowanych w treści zadania obliczeń sprawdzających równość $S_2=S_4$, możemy ściągnąć na siebie większy gniew osoby oceniającej rozwiązanie, niżbyśmy na to zasługiwali tylko z powodu drobnego błędu rachunkowego.

Uwaga 2: Przez S_N zwykle oznaczamy N-tą sumę częściową szeregu, podczas gdy sumy S_1, S_2, S_4 w treści zadania są czymś zupełnie innym. Zadanie sprawdza więc przy okazji (bo nie to jest jego głównym celem) rozumienie, że te same oznaczenia mogą w różnym kontekście znaczyć coś zupełnie innego. Student, który nie miałby tej świadomości, byłby narażony na bezkrytyczne przyswojenie następującego wzoru Pitagorasa-Einsteina:

$$E = m \cdot \left(a^2 + b^2\right).$$

655. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **wymiernych dodatnich**, że sumy $S_1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $S_2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ oraz $S_4 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^4$ są liczbami całkowitymi, a ponadto zachodzi równość $S_2 = S_4$. Dla podanego przykładu podać wartości sum S_1, S_2 i S_4.

Wskazówka: Nie istnieje czysty szereg geometryczny spełniający warunki zadania, ale przykład można skonstruować odpowiednio modyfikując szereg geometryczny.

Rozwiązanie:

Rozważmy modyfikację szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, w której każdy wyraz jest powtórzony siedmiokrotnie, a dokładniej

$$a_n = b_{[(n+6)/7]} = \frac{5 \cdot 3^{[(n-1)/7]}}{4^{[(n+6)/7]}}.$$

Wówczas

$$S_1 = 7 \cdot T_1 = 35, \qquad S_2 = 7 \cdot T_2 = 25 \quad \text{oraz} \quad S_4 = 7 \cdot T_4 = 25.$$

656. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^3 - 4n}.$$

Rozwiązanie:

Szukamy takich liczb A, B i C że

$$\frac{1}{n^3 - 4n} = \frac{1}{(n-2) \cdot n \cdot (n+2)} = \frac{A}{n-2} + \frac{B}{n} + \frac{C}{n+2}.$$

Po wymnożeniu prawej równości stronami przez $(n-2) \cdot n \cdot (n+2)$ otrzymujemy

$$1 = A \cdot n \cdot (n+2) + B \cdot (n-2) \cdot (n+2) + C \cdot (n-2) \cdot n.$$

Dla $n=2$ otrzymujemy $A = 1/8$, dla $n=0$ dostajemy $B = -1/4$, natomiast przyjęcie $n = -2$ daje $C = 1/8$.

Zatem N-ta suma częściowa danego szeregu wyraża się wzorem

$$S_N = \sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n^3 - 4n} = \frac{1}{8} \cdot \sum_{n=3}^{N} \left(\frac{1}{n-2} - \frac{2}{n} + \frac{1}{n+2}\right) =$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \left(\left(\frac{1}{1} - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{4} + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{6} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{7} + \frac{1}{9}\right) + \ldots \right.$$

$$\ldots + \left(\frac{1}{N-6} - \frac{2}{N-4} + \frac{1}{N-2}\right) + \left(\frac{1}{N-5} - \frac{2}{N-3} + \frac{1}{N-1}\right) +$$

$$+\left(\frac{1}{N-4}-\frac{2}{N-2}+\frac{1}{N}\right)+\left(\frac{1}{N-3}-\frac{2}{N-1}+\frac{1}{N+1}\right)+\left(\frac{1}{N-2}-\frac{2}{N}+\frac{1}{N+2}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{N-1}-\frac{1}{N}+\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N+2}\right),$$

co przy N dążącym do $+\infty$ zbiega do

$$\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{8}\cdot\frac{12+6-4-3}{12}=\frac{11}{96}.$$

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg ma sumę równą 11/96.

Uwaga: Nieco prostsze rachunkowo rozwiązanie może być oparte na tożsamości

$$\frac{1}{(n-2)\cdot n\cdot(n+2)}=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{(n-2)\cdot n}-\frac{1}{n\cdot(n+2)}\right),$$

pod warunkiem, że na nią jakoś wpadniemy.

657. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+5n}.$$

Rozwiązanie:

Szukamy takich liczb A i B, że

$$\frac{1}{n^2+5n}=\frac{1}{n\cdot(n+5)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+5}.$$

Po wymnożeniu prawej równości stronami przez $n\cdot(n+5)$ otrzymujemy

$$1=A(n+5)+Bn.$$

Dla $n=0$ otrzymujemy $A=1/5$, natomiast przyjęcie $n=-5$ daje $B=-1/5$.

Zatem N-ta suma częściowa danego szeregu wyraża się wzorem

$$S_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2+5n}=\frac{1}{5}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+5}\right)=$$

$$=\frac{1}{5}\left(\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{12}\right)+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\left(\frac{1}{N-3}-\frac{1}{N+2}\right)+\left(\frac{1}{N-2}-\frac{1}{N+3}\right)+\left(\frac{1}{N-1}-\frac{1}{N+4}\right)+\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{N+5}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{N+1}-\frac{1}{N+2}-\frac{1}{N+3}-\frac{1}{N+4}-\frac{1}{N+5}\right),$$

co przy N dążącym do $+\infty$ zbiega do

$$\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{5}\cdot\frac{60+30+20+15+12}{60}=\frac{137}{300}.$$

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg ma sumę równą 137/300.

658. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **wymiernych dodatnich**, że zachodzi równość

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^3 .$$

Dla podanego przykładu obliczyć wartości sum $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ oraz $S_3 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$.

Rozwiązanie:

Sposób I:

Spróbujemy znaleźć szereg geometryczny o żądanych własnościach.

W tym celu załóżmy, że $a_n = cq^{n-1}$, pamiętając, aby $c > 0$ oraz $0 < q < 1$ były liczbami wymiernymi. Wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} cq^{n-1} = \frac{c}{1-q}$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3 = \sum_{n=1}^{\infty} c^3 \left(q^3\right)^{n-1} = \frac{c^3}{1-q^3} ,$$

co sprowadza równość podaną w treści zadania do postaci

$$\frac{c}{1-q} = \frac{c^3}{1-q^3} . \qquad (\spadesuit)$$

Ponieważ

$$\frac{c^3}{1-q^3} = \frac{c}{1-q} \cdot \frac{c^2}{1+q+q^2} ,$$

równanie ($\spadesuit$) można zapisać jako

$$\frac{c^2}{1+q+q^2} = 1 ,$$

czyli

$$c^2 = 1+q+q^2 .$$

Konstrukcja przykładu będzie zakończona, jeśli znajdziemy taką liczbę wymierną dodatnią $q < 1$, że liczba $1+q+q^2$ jest kwadratem liczby wymiernej.

Przyjmując $q = m/n$, gdzie $m < n$ są liczbami naturalnymi, otrzymujemy

$$c = \frac{\sqrt{m^2+mn+n^2}}{n} .$$

Z równości $3^2+3\cdot 5+5^2 = 7^2$ (trójkąt o bokach 3, 5, 7 ma kąt 120°) wnioskujemy, że zdefiniowana wyżej liczba c jest wymierna dla $m = 3$, $n = 5$. Wówczas $q = 3/5$ oraz $c = 7/5$, a przy tym

$$S_1 = \frac{7/5}{1-3/5} = \frac{7/5}{2/5} = \frac{7}{2}$$

oraz

$$S_3 = \frac{343/125}{1-27/125} = \frac{343/125}{(125-27)/125} = \frac{343}{98} = \frac{7}{2} .$$

Odpowiedź: Przykładem szeregu spełniającego warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7\cdot 3^{n-1}}{5^n}\,,$$

a wartości sum wymienionych w treści zadania są równe $S_1 = S_3 = 7/2$.

Sposób II:

Skonstruujemy żądany w zadaniu szereg modyfikując dowolny szereg o wyrazach wymiernych dodatnich i znanej sumie oraz znanej sumie sześcianów wyrazów.

Za punkt wyjścia weźmy możliwie najprostszy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, dla którego potrafimy wyliczyć podane w treści zadania sumy. Niech $b_n = \frac{1}{2^n}$. Wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8^n} = \frac{1}{7}\,.$$

Przeskalujmy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, aby rozważane sumy stały się całkowite (wtedy łatwiej będzie nad nimi zapanować). Przyjmijmy $c_n = 7b_n = \frac{7}{2^n}$. Otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{2^n} = 7 \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} c_n^3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^3}{8^n} = 49\,.$$

Dołóżmy na początku szeregu k wyrazów równych $1/2$, czyli przyjmijmy

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{dla} \quad n \leqslant k \\ \dfrac{7}{2^{n-k}} & \text{dla} \quad n > k \end{cases}$$

Wówczas

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 7 + \frac{k}{2}$$

oraz

$$S_3 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^3 = 49 + \frac{k}{8}\,,$$

skąd wynika, że liczba k powinna spełniać równanie

$$7 + \frac{k}{2} = 49 + \frac{k}{8}\,.$$

To prowadzi do $k = 112$.

Odpowiedź: Przykładem szeregu spełniającego warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{112} \frac{1}{2} + \sum_{n=113}^{\infty} \frac{7}{2^{n-112}}\,,$$

a wartości sum wymienionych w treści zadania są równe $S_1 = S_3 = 63$.