Kolokwium nr 55: piątek 16.12.2016, godz. 8:15-9:00, materiał zad. 1–331, 501-671.

7. Funkcje i ich własności. Ciągłość.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 6(może też 13).12.2016 (grupa 1 *lux*).

Dla podanej funkcji f wskazać taką liczbę M, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność $|f(x)| \leqslant M$.

659. $f(x)=e^{\sin x}$ **660.** $f(x)=\frac{x}{x^4+3}$ **661.** $f(x)=\frac{x^{1000}}{2^{|x|}}$

Oszustwo **662.** Niech $f,g:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ będą takimi funkcjami ciągłymi, że $f(0)=5$, $f(1)=7$, $g(0)=8$, $g(1)=4$. Wtedy istnieje takie $c\in(0,1)$, że $f(c)=g(c)$.
Dowód: Z własności Darboux funkcji ciągłych zastosowanej do funkcji f wynika, że dla pewnego $c\in(0,1)$ mamy $f(c)=6$. Podobnie, stosując własność Darboux do funkcji g otrzymujemy $g(c)=6$. A zatem $f(c)=g(c)$, co należało dowieść. □

Wskazać błąd w powyższym rozumowaniu i podać poprawny dowód.

663. Dowieść, że równanie

$$x^{1000000}+2=(1{,}000001)^x$$

ma co najmniej jedno rozwiązanie rzeczywiste. Wskazać konkretny (być może niepotrzebnie duży) przedział, w którym znajduje się rozwiązanie.

664. Dla których liczb

$$n\in\left\{2,\,4,\,10,\,20,\,50,\,100,\,200,\,500,\,1000,\,10^5,\,10^{10},\,10^{30},\,10^{100},\,10^{1000}\right\}$$

wykres funkcji $f(x)=2^x$ przecina wykres funkcji $g(x)=x^n+4$, jeżeli za jednostkę na osiach przyjmiemy 1 cm. Przyjąć promień wszechświata równy 10^{28} cm. Punkty przecięcia wykresów leżące w innych wszechświatach nas nie interesują.
Jak zmieni się odpowiedź, gdy wykonamy rysunek biorąc za jednostkę na osiach średnicę atomu (10^{-8} cm) lub średnicę jądra atomowego (10^{-13} cm)?

665. Dowieść, że równanie $x^2=25\pi^2\cdot\cos x$ ma co najmniej 10 rozwiązań rzeczywistych.

666. Dowieść, że równanie $x^2=25\pi^2\cdot\cos(x^3)$ ma więcej niż 1000 rozwiązań rzeczywistych.

Zadania z rozwiązaniami.

667. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej x zachodzą nierówności

$$C \leqslant \frac{8x+7}{5x+\sqrt{x}+8} \leqslant 6 \cdot C\,.$$

668. Wybrać odpowiednią liczbę całkowitą N i udowodnić, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność

$$\frac{3^x+4^x+9^x}{3^x+8^x+9^x} \leqslant N$$

oraz wykazać istnienie takiej liczby rzeczywistej x, że

$$\frac{3^x+4^x+9^x}{3^x+8^x+9^x} > N-1\,.$$

669. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\sqrt[8]{x^2+10^8}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)| \leqslant \frac{|x-y|}{4000}\,.$$

670. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\sqrt[8]{x^4+10^8}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)| \leqslant \frac{|x-y|}{20}\,.$$

671. Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$f(x) = -\frac{25x}{24} + \frac{\sqrt{49x^2+37}}{24}\,.$$

Dowieść, że f jest odwrotna do samej siebie.