667. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej x zachodzą nierówności

$$C \leqslant \frac{8x+7}{5x+\sqrt{x}+8} \leqslant 6\cdot C\,.$$

Rozwiązanie:

W przypadku, gdy $x \geqslant 1$, wykonujemy następujące szacowania:

$$\frac{4}{7} = \frac{8}{14} = \frac{8x+0}{5x+x+8x} \leqslant \frac{8x+7}{5x+\sqrt{x}+8} \leqslant \frac{8x+7x}{5x+0+0} = \frac{15}{5} = 3\,.$$

Natomiast w przypadku, gdy $0 < x < 1$, oszacowania wyglądają następująco:

$$\frac{1}{2} = \frac{7}{14} = \frac{0+7}{5+1+8} \leqslant \frac{8x+7}{5x+\sqrt{x}+8} \leqslant \frac{8+7}{0+0+8} = \frac{15}{8}\,.$$

Zauważamy, że

$$\frac{1}{2} < \frac{4}{7} \qquad \text{oraz} \qquad \frac{15}{8} < 3\,.$$

Zatem dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej x zachodzą nierówności

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{8x+7}{5x+\sqrt{x}+8} \leqslant 3\,,$$

można więc przyjąć $C = 1/2$.

668. Wybrać odpowiednią liczbę całkowitą N i udowodnić, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność

$$\frac{3^x+4^x+9^x}{3^x+8^x+9^x} \leqslant N$$

oraz wykazać istnienie takiej liczby rzeczywistej x, że

$$\frac{3^x+4^x+9^x}{3^x+8^x+9^x} > N-1\,.$$

Rozwiązanie:

Rozpatrzymy dwa przypadki.

1° Dla $x \geqslant 0$ zachodzi nierówność $4^x \leqslant 8^x$, skąd

$$3^x+4^x+9^x \leqslant 3^x+8^x+9^x\,,$$

czyli

$$\frac{3^x+4^x+9^x}{3^x+8^x+9^x} \leqslant 1\,.$$

2° Niech teraz $x < 0$. Wówczas $4^x > 8^x$, skąd

$$3^x+4^x+9^x > 3^x+8^x+9^x\,,$$

czyli

$$\frac{3^x+4^x+9^x}{3^x+8^x+9^x} > 1\,.$$

Ponadto korzystając z nierówności $4^x < 3^x$ dla $x < 0$ otrzymujemy

$$\frac{3^x+4^x+9^x}{3^x+8^x+9^x} < \frac{3^x+3^x+9^x}{3^x+0+9^x} < \frac{3^x+3^x+9^x+9^x}{3^x+9^x} = 2\,.$$

Wykazaliśmy więc, że

$$\frac{3^x+4^x+9^x}{3^x+8^x+9^x}\leqslant 1<2 \quad \text{dla} \quad x\geqslant 0$$

oraz

$$1<\frac{3^x+4^x+9^x}{3^x+8^x+9^x}<2 \quad \text{dla} \quad x<0\,.$$

Odpowiedź: Warunki zadania są spełnione przez liczbę $N=2$.

669. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\sqrt[8]{x^2+10^8}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{4000}\,.$$

Rozwiązanie:

Skorzystamy ze wzoru skróconego mnożenia

$$a^8-b^8=\left(a^4-b^4\right)\cdot\left(a^4+b^4\right)=\left(a^2-b^2\right)\cdot\left(a^2+b^2\right)\cdot\left(a^4+b^4\right)=$$
$$=(a-b)\cdot(a+b)\cdot\left(a^2+b^2\right)\cdot\left(a^4+b^4\right),$$

który przy założeniu $a+b\neq 0$ można zapisać w postaci

$$a-b=\frac{a^8-b^8}{(a+b)\cdot(a^2+b^2)\cdot(a^4+b^4)}\,.$$

Przyjmując $a=\sqrt[8]{x^2+10^8}$ oraz $b=\sqrt[8]{y^2+10^8}$, zauważamy, że $a+b>0$ i przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności:

$$|f(x)-f(y)|=\left|\sqrt[8]{x^2+10^8}-\sqrt[8]{y^2+10^8}\right|=$$

$$=\left|\frac{(x^2+10^8)-(y^2+10^8)}{\left(\sqrt[8]{x^2+10^8}+\sqrt[8]{y^2+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^2+10^8}+\sqrt[4]{y^2+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+10^8}+\sqrt{y^2+10^8}\right)}\right|=$$

$$=\frac{|x^2-y^2|}{\left(\sqrt[8]{x^2+10^8}+\sqrt[8]{y^2+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^2+10^8}+\sqrt[4]{y^2+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+10^8}+\sqrt{y^2+10^8}\right)}=$$

$$=\frac{|x-y|\cdot|x+y|}{\left(\sqrt[8]{x^2+10^8}+\sqrt[8]{y^2+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^2+10^8}+\sqrt[4]{y^2+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+10^8}+\sqrt{y^2+10^8}\right)}\,. \tag{1}$$

Korzystając z nierówności trójkąta i wykorzystując równość $|x|=\sqrt{x^2}$ otrzymujemy:

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|=\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}<\sqrt{x^2+10^8}+\sqrt{y^2+10^8}\,,$$

skąd

$$\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+10^8}+\sqrt{y^2+10^8}}<1\,. \tag{2}$$

Ponadto zauważamy, że

$$\frac{1}{\sqrt[8]{x^2+10^8}+\sqrt[8]{y^2+10^8}}\leqslant\frac{1}{\sqrt[8]{0+10^8}+\sqrt[8]{0+10^8}}=\frac{1}{10+10}=\frac{1}{20}\,. \tag{3}$$

Analogicznie

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x^2+10^8}+\sqrt[4]{y^2+10^8}} \leqslant \frac{1}{\sqrt[4]{0+10^8}+\sqrt[4]{0+10^8}} = \frac{1}{100+100} = \frac{1}{200}\,. \tag{4}$$

Wykorzystanie tych nierówności pozwala dokończyć oszacowania:

$$\frac{|x-y|\cdot|x+y|}{\left(\sqrt[8]{x^2+10^8}+\sqrt[8]{y^2+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^2+10^8}+\sqrt[4]{y^2+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+10^8}+\sqrt{y^2+10^8}\right)} =$$

$$= |x-y|\cdot\frac{1}{\sqrt[8]{x^2+10^8}+\sqrt[8]{y^2+10^8}}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{x^2+10^8}+\sqrt[4]{y^2+10^8}}\cdot\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+10^8}+\sqrt{y^2+10^8}} \leqslant$$

$$\leqslant |x-y|\cdot\frac{1}{20}\cdot\frac{1}{200}\cdot 1 = \frac{|x-y|}{4000}\,.$$

670. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\sqrt[8]{x^4+10^8}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)| \leqslant \frac{|x-y|}{20}\,.$$

Rozwiązanie:

Skorzystamy ze wzoru skróconego mnożenia

$$a^8-b^8=\left(a^4-b^4\right)\cdot\left(a^4+b^4\right)=\left(a^2-b^2\right)\cdot\left(a^2+b^2\right)\cdot\left(a^4+b^4\right)=$$

$$=(a-b)\cdot(a+b)\cdot\left(a^2+b^2\right)\cdot\left(a^4+b^4\right),$$

który przy założeniu $a+b\neq 0$ można zapisać w postaci

$$a-b=\frac{a^8-b^8}{(a+b)\cdot(a^2+b^2)\cdot(a^4+b^4)}\,.$$

Przyjmując $a=\sqrt[8]{x^4+10^8}$ oraz $b=\sqrt[8]{y^4+10^8}$, zauważamy, że $a+b>0$ i przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności:

$$|f(x)-f(y)| = \left|\sqrt[8]{x^4+10^8}-\sqrt[8]{y^4+10^8}\right| =$$

$$= \left|\frac{(x^4+10^8)-(y^4+10^8)}{\left(\sqrt[8]{x^4+10^8}+\sqrt[8]{y^4+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^4+10^8}+\sqrt[4]{y^4+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+10^8}+\sqrt{y^4+10^8}\right)}\right| =$$

$$= \frac{|x^4-y^4|}{\left(\sqrt[8]{x^4+10^8}+\sqrt[8]{y^4+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^4+10^8}+\sqrt[4]{y^4+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+10^8}+\sqrt{y^4+10^8}\right)} =$$

$$= \frac{|x-y|\cdot|x+y|\cdot(x^2+y^2)}{\left(\sqrt[8]{x^4+10^8}+\sqrt[8]{y^4+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^4+10^8}+\sqrt[4]{y^4+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+10^8}+\sqrt{y^4+10^8}\right)}\,. \tag{1}$$

Korzystając z nierówności trójkąta i wykorzystując równość $|x|=\sqrt[4]{x^4}$ otrzymujemy:

$$|x+y| \leqslant |x|+|y| = \sqrt[4]{x^4}+\sqrt[4]{y^4} < \sqrt[4]{x^4+10^8}+\sqrt[4]{y^4+10^8}\,,$$

skąd

$$\frac{|x+y|}{\sqrt[4]{x^4+10^8}+\sqrt[4]{y^4+10^8}} < 1\,. \tag{2}$$

Z kolei równość $x^2=\sqrt{x^4}$ prowadzi do:

$$x^2+y^2=\sqrt{x^4}+\sqrt{y^4}<\sqrt{x^4+10^8}+\sqrt{y^4+10^8}\,,$$

skąd

$$\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^4+10^8}+\sqrt{y^4+10^8}}<1\,. \tag{3}$$

Ponadto zauważamy, że

$$\frac{1}{\sqrt[8]{x^4+10^8}+\sqrt[8]{y^4+10^8}}\leqslant\frac{1}{\sqrt[8]{0+10^8}+\sqrt[8]{0+10^8}}=\frac{1}{10+10}=\frac{1}{20}\,. \tag{4}$$

Zastosowanie nierówności (2), (3) i (4) do (1) pozwala dokończyć oszacowania:

$$\frac{|x-y|\cdot|x+y|\cdot(x^2+y^2)}{\left(\sqrt[8]{x^4+10^8}+\sqrt[8]{y^4+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^4+10^8}+\sqrt[4]{y^4+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+10^8}+\sqrt{y^4+10^8}\right)}=$$

$$=|x-y|\cdot\frac{1}{\sqrt[8]{x^4+10^8}+\sqrt[8]{y^4+10^8}}\cdot\frac{|x+y|}{\sqrt[4]{x^4+10^8}+\sqrt[4]{y^4+10^8}}\cdot\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^4+10^8}+\sqrt{y^4+10^8}}\leqslant$$

$$\leqslant|x-y|\cdot\frac{1}{20}\cdot1\cdot1=\frac{|x-y|}{20}\,.$$

671. Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$f(x)=-\frac{25x}{24}+\frac{\sqrt{49x^2+37}}{24}\,.$$

Dowieść, że f jest odwrotna do samej siebie.
Rozwiązanie:
Wykres funkcji f jest krzywą o równaniu

$$y=-\frac{25x}{24}+\frac{\sqrt{49x^2+37}}{24}\,,$$

czyli

$$24y+25x=\sqrt{49x^2+37}\,.$$

Z powyższego rówania wynika

$$24y+24x=\sqrt{49x^2+37}-x\geqslant\sqrt{49x^2+37}-|x|=\sqrt{49x^2+37}-\sqrt{x^2}>0\,,$$

a z podobnego równania

$$24y+25x=-\sqrt{49x^2+37}$$

dochodzimy do

$$24y+24x=-\sqrt{49x^2+37}-x\leqslant-\sqrt{49x^2+37}+|x|=-\sqrt{49x^2+37}+\sqrt{x^2}<0\,.$$

Zatem równanie wykresu funkcji f można podnieść do kwadratu uzupełniając je nierównością $x+y>0$. Otrzymujemy kolejno

$$576y^2+1200xy+625x^2=49x^2+37, \qquad x+y>0$$
$$576y^2+1200xy+576x^2=37, \qquad x+y>0$$

Z uwagi na symetrię występowania x oraz y w powyższym warunku, wykres funkcji f jest symetryczny względem prostej o równaniu $x=y$, co oznacza, że funkcja f jest funkcją odwrotną do samej siebie.