Kolokwium nr 57: **piątek 13.01.2017**, godz. 8:15, materiał zad. 1–441, 501–715.

10. Pochodna funkcji – twierdzenie Lagrange'a.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 5,10.01.2017 (grupa 1 *lux*).

708. Dla danych różnych liczb rzeczywistych a i b oraz zbioru $Z\subset\mathbb{R}$ chcemy formalnie zapisać warunek, że istnieje w zbiorze Z liczba (ostro) między a i b, nie wiemy jednak z góry, która z liczb a,b jest większa. Które z podanych warunków są do tego celu odpowiednie?

(♣) $$\underset{c\in Z}{\exists}\ a<c<b$$

(♢) $$\underset{c\in Z}{\exists}\ a<c<b\ \wedge\ b<c<a$$

(♡) $$\underset{c\in Z}{\exists}\ a<c<b\ \vee\ b<c<a$$

(♠) $$\underset{c\in(0,1)}{\exists}\ ac+b(1-c)\in Z$$

(♣♣) $$\underset{c>0}{\exists}\ ac+b(1-c)\in Z$$

(♢♢) $$\underset{c\in[0,1]}{\exists}\ bc+a(1-c)\in Z$$

(♡♡) $$\underset{c\in(0,1)}{\exists}\ a+(b-a)c\in Z$$

(♠♠) $$\underset{c\in(0,1)}{\exists}\ a+(a-b)c\in Z$$

(♣♣♣) $$\underset{c\in Z}{\exists}\ \frac{c}{b-a}\in(0,1)$$

(♢♢♢) $$\underset{c\in Z}{\exists}\ \frac{c-b}{b-a}\in(0,1)$$

(♡♡♡) $$\underset{c\in Z}{\exists}\ \frac{c-a}{b-a}\in(0,1)$$

(♠♠♠) $$\underset{c\in Z\setminus\{a\}}{\exists}\ \frac{b-a}{c-a}>1$$

709. Niech $\mathbb{T}$ będzie zbiorem wszystkich funkcji różniczkowalnych $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniających warunki

$$f(3)=7 \qquad \text{oraz} \qquad 2\leqslant f'(x)\leqslant 3 \quad \text{dla każdego} \quad x\in\mathbb{R}.$$

W każdym z zadań **A-F** podaj odpowiedni kres zbioru.

A. $\sup\{f(6): f\in\mathbb{T}\}=$...................................

B. $\inf\{f(5): f\in\mathbb{T}\}=$...................................

C. $\sup\{f(2): f\in\mathbb{T}\}=$...................................

D. $\inf\{f(1): f\in\mathbb{T}\}=$...................................

E. $\sup\{f(9)-f(4): f\in\mathbb{T}\}=$...................................

F. $\inf\{f(7)-f(0): f\in\mathbb{T}\}=$...................................

710. Przyporządkować następującym twierdzeniom podane niżej warunki oraz powiedzieć, co mówi warunek nieprzyporządkowany żadnemu twierdzeniu.

(i) **Własność Darboux funkcji ciągłych:** Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a,b]$, to

(ii) **Własność Darboux pochodnej funkcji:** Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna na przedziale otwartym zawierającym przedział $[a,b]$, to

(iii) **Twierdzenie Rolle'a:** Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a,b]$ i różniczkowalna na przedziale (a,b), a ponadto $f(a)=f(b)$, to

(iv) **Twierdzenie Lagrange'a (o wartości średniej rachunku różniczkowego):** Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a,b]$ i różniczkowalna na przedziale (a,b), to

(4♣) $$\underset{s\in(0,1)}{\forall}\ \underset{t\in(0,1)}{\exists}\ f'(a+t(b-a))=f'(a)+s(f'(b)-f'(a))$$

(5♢) $$\underset{t\in(0,1)}{\exists}\ f(b)=f(a)+(b-a)f'(a+t(b-a))$$

(6♡) $$\underset{s\in(0,1)}{\forall}\ \underset{t\in(0,1)}{\exists}\ f(a+t(b-a))=f(a)+s(f(b)-f(a))$$

(7♢) $$\underset{t\in(0,1)}{\forall}\ \underset{s\in(0,1)}{\exists}\ f(a+t(b-a))=f(a)+s(f(b)-f(a))$$

(7♠) $$\underset{t\in(0,1)}{\exists}\ f'(a+t(b-a))=0$$

711. Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest określona wzorem
$$f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\,.$$
Funkcja $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest funkcją odwrotną do f, tzn. $f(g(x))=g(f(x))=x$ dla dowolnej liczby rzeczywistej x.

Podać wzór na pochodną funkcji g. Podać przykład takiej liczby wymiernej $x>1$, że liczba $g'(x)$ jest wymierna.

712. Skonstruować przykład takiej funkcji różniczkowalnej $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, że
$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{dla}\quad x\leqslant 0\\ x & \text{dla}\quad x\geqslant 1\end{cases}$$

713. Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności
$$\frac{1}{n+1}<\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}\,.$$

714. Udowodnić nierówność
$$\operatorname{arctg}6+\operatorname{arctg}12<\operatorname{arctg}7+\operatorname{arctg}10\,.$$

715. Udowodnić istnienie liczby rzeczywistej $x\in(0,2)$ spełniającej nierówność
$$x^{2015}\cdot(x-2)^{2016}>1\,.$$