**711.** Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest określona wzorem
$$f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\,.$$
Funkcja $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest funkcją odwrotną do $f$, tzn. $f(g(x))=g(f(x))=x$ dla dowolnej liczby rzeczywistej $x$.

Podać wzór na pochodną funkcji $g$. Podać przykład takiej liczby wymiernej $x>1$, że liczba $g'(x)$ jest wymierna.

*Rozwiązanie:*

*Sposób I:*

Równość $g(x)=y$ jest równoważna równości $f(y)=x$, czyli $x=\dfrac{e^y-e^{-y}}{2}$ lub inaczej
$$x=\frac{t-\frac{1}{t}}{2}\,, \qquad (\clubsuit)$$
jeśli przyjmiemy $t=e^y$. Przy tych oznaczeniach mamy $t>0$ i $y=\ln t$. Rozwiązujemy równanie ($\clubsuit$) tak, aby wyznaczyć $t$ w zależności od $x$:
$$2xt=t^2-1\,,$$
$$t^2-2xt-1=0\,,$$
$$t=\frac{2x\pm\sqrt{4x^2+4}}{2}\,,$$
$$t=x\pm\sqrt{x^2+1}\,,$$
skąd wobec $t>0$ musimy przyjąć "$\pm$" = "$+$". Ostatecznie
$$t=x+\sqrt{x^2+1}$$
i w konsekwencji
$$g(x)=y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\,.$$
Mając jawny wzór określający funkcję $g$ bez trudu obliczamy jej pochodną:
$$g'(x)=\frac{1+\frac{2x}{2\cdot\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,.$$

Jako przykład liczby wymiernej $x>1$, dla której $g'(x)$ jest liczbą wymierną, przyjmijmy $x=4/3$. Otrzymujemy wtedy
$$g'(x)=g'(4/3)=\frac{1}{\sqrt{16/9+1}}=\frac{1}{\sqrt{25/9}}=\frac{3}{5}\,.$$

*Sposób II:*

Zauważmy, że
$$f'(y)=\frac{e^y+e^{-y}}{2}=\sqrt{\frac{e^{2y}+2+e^{-2y}}{4}}=\sqrt{\frac{e^{2y}-2+e^{-2y}}{4}+1}=\sqrt{\left(\frac{e^y-e^{-y}}{2}\right)^2+1}=$$
$$=\sqrt{(f(y))^2+1}\,.$$

Ze wzoru na pochodną funkcji odwrotnej otrzymujemy

$$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}=\frac{1}{\sqrt{(f(g(x)))^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,.$$

W powyższych przekształceniach wykorzystaliśmy równość

$$f'(y)=\sqrt{(f(y))^2+1}$$

dla $y=g(x)$.

Dla urozmaicenia tym razem jako przykład liczby wymiernej $x>1$, dla której $g'(x)$ jest liczbą wymierną, przyjmijmy $x=12/5$. Otrzymujemy wtedy

$$g'(x)=g'(12/5)=\frac{1}{\sqrt{144/25+1}}=\frac{1}{\sqrt{169/25}}=\frac{5}{13}\,.$$

**712.** Skonstruować przykład takiej funkcji różniczkowalnej $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, że

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{dla} \quad x\leqslant 0\\ x & \text{dla} \quad x\geqslant 1\end{cases}$$

*Rozwiązanie:*

Postaramy się uzupełnić funkcję $f$ na przedziale $(0,1)$ funkcją wielomianową. Ponieważ musimy dopasować cztery liczby (wartości i pochodne w punktach 0 i 1), wypróbujemy wielomian, w którym można dobrać cztery współczynniki, a mianowicie wielomian stopnia co najwyżej 3, oznaczmy go przez

$$W(x)=ax^3+bx^2+cx+d\,.$$

Pełna definicja funkcji $f$ przyjmie więc postać:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{dla} \quad x\leqslant 0\\ ax^3+bx^2+cx+d & \text{dla} \quad 0<x<1\\ x & \text{dla} \quad x\geqslant 1\end{cases}$$

Zauważmy, że pochodna wielomianu jest dana wzorem $W'(x)=3ax^2+2bx+c$.

Aby określona wyżej funkcja $f$ była ciągła i różniczkowalna, muszą zachodzić następujące równości:

- ciągłość w zerze: $f(0)=W(0^+)$, czyli $0=d$,
- ciągłość w jedynce: $f(1)=W(1^-)$, czyli $1=a+b+c+d$,
- różniczkowalność w zerze: $f'(0^-)=W'(0^+)$, czyli $0=c$,
- różniczkowalność w jedynce: $f'(1^+)=W'(1^-)$, czyli $1=3a+2b+c$.

Wobec $c=d=0$ otrzymujemy układ równań

$$f(x)=\begin{cases}a+b=1\,,\\ 3a+2b=1\,,\end{cases}$$

który ma rozwiązanie $a=-1$, $b=2$, skąd $W(x)=-x^3+2x^2$.

*Odpowiedź:* Funkcją spełniającą warunki zadania jest funkcja określona następującym wzorem:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{dla} \quad x\leqslant 0\\ -x^3+2x^2 & \text{dla} \quad 0<x<1\\ x & \text{dla} \quad x\geqslant 1\end{cases}$$

**713.** Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej $n$ zachodzą nierówności

$$\frac{1}{n+1}<\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}\,.$$

*Rozwiązanie:*

Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej rachunku różniczkowego zastosowanego do funkcji $f(x)=\ln x$ na przedziale $[n,n+1]$ wynika istnienie takiej liczby $c\in(n,n+1)$, że

$$\ln(n+1)-\ln n=f'(c)\,.$$

Ponieważ

$$f'(x)=\frac{1}{x}\,,$$

z nierówności $n<c<n+1$ otrzymujemy

$$\frac{1}{n+1}\quad<\quad\ln(n+1)-\ln n=f'(c)=\frac{1}{c}\quad<\quad\frac{1}{n}\,,$$

co kończy dowód nierówności podanych w treści zadania.

**714.** Udowodnić nierówność

$$\mathrm{arctg}6+\mathrm{arctg}12<\mathrm{arctg}7+\mathrm{arctg}10\,.$$

*Rozwiązanie:*

*Sposób I (oficjalny):*

Podana nierówność może być przepisana w postaci

$$\mathrm{arctg}12-\mathrm{arctg}10<\mathrm{arctg}7-\mathrm{arctg}6\,.$$

Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej rachunku różniczkowego zastosowanego do funkcji $f(x)=\mathrm{arctg}x$ na przedziałach $[6,7]$ oraz $[10,12]$ wynika istnienie takich liczb $c\in(6,7)$ oraz $d\in(10,12)$, że

$$\mathrm{arctg}7-\mathrm{arctg}6=f'(c)$$

oraz

$$\mathrm{arctg}12-\mathrm{arctg}10=2\cdot f'(d)\,.$$

Ponieważ

$$f'(x)=\frac{1}{x^2+1}\,,$$

z nierówności $6<c<7$ oraz $10<d<12$ otrzymujemy odpowiednio

$$\frac{1}{50}\quad<\quad\mathrm{arctg}7-\mathrm{arctg}6=f'(c)=\frac{1}{c^2+1}\quad<\quad\frac{1}{37}$$

oraz

$$\frac{2}{145}\quad<\quad\mathrm{arctg}12-\mathrm{arctg}10=2\cdot f'(d)=\frac{2}{d^2+1}\quad<\quad\frac{2}{101}\,.$$

W konsekwencji

$$\mathrm{arctg}12-\mathrm{arctg}10<\frac{2}{101}<\frac{2}{100}=\frac{1}{50}<\mathrm{arctg}7-\mathrm{arctg}6\,,$$

co kończy dowód nierówności podanej w treści zadania.

*Sposób II (rachunkowy):*

Niech
$$f(x)=\operatorname{arctg}(6+x)+\operatorname{arctg}(12-2x)$$
będzie funkcją, która dla $x=0$ i $x=1$ przyjmuje wartości równe odpowiednio lewej i prawej stronie dowodzonej nierówności. Zadanie będzie rozwiązane, jeśli wykażemy, że funkcja $f$ jest rosnąca na przedziale $(0,1)$, a do tego wystarczy wykazać dodatniość jej pochodnej na tym przedziale. Miłośnicy rachunków bez trudu stwierdzą, że
$$f'(x)=\frac{1}{(6+x)^2+1}+\frac{-2}{(12-2x)^2+1}=\frac{2x^2-72x+71}{((6+x)^2+1)\cdot((12-2x)^2+1)}=$$
$$=\frac{2x^2-4x-68x+2+68+1}{((6+x)^2+1)\cdot((12-2x)^2+1)}=\frac{2\cdot(x-1)^2+68\cdot(1-x)+1}{((6+x)^2+1)\cdot((12-2x)^2+1)},$$
co wobec dodatniości ostatniego wyrażenia dla $x\leqslant 1$ kończy rozwiązanie zadania.

*Sposób III (wymaga znajomości pewnej sztuczki):*

Skorzystamy z tego, że $\operatorname{arctg}x$ jest argumentem liczby zespolonej $1+ix$ oraz z faktu, że przy mnożeniu liczb zespolonych ich argumenty się dodają.

Wobec tego $\operatorname{arctg}6+\operatorname{arctg}12$ jest argumentem liczby
$$(1+6i)\cdot(1+12i)=1+18i-72=-71+18i=71\cdot\left(-1+\frac{18}{71}\cdot i\right),$$
natomiast $\operatorname{arctg}7+\operatorname{arctg}10$ jest argumentem liczby
$$(1+7i)\cdot(1+10i)=1+17i-70=-69+17i=69\cdot\left(-1+\frac{17}{69}\cdot i\right).$$

Zatem lewa i prawa strona dowodzonej nierówności są równe odpowiednio argumentom liczb
$$-1+\frac{18}{71}\cdot i \qquad \text{oraz} \qquad -1+\frac{17}{69}\cdot i\,.$$
Wobec tego dowodzona nierówność jest równoważna nierówności $\frac{18}{71}>\frac{17}{69}$, którą możemy wykazać następująco:
$$\frac{18}{71}>\frac{18}{72}=\frac{1}{4}=\frac{17}{68}>\frac{17}{69}\,.$$

*Uwagi:* Ponieważ argumentem liczby zespolonej $-1+\frac{1}{4}\cdot i=-\left(1-\frac{1}{4}\cdot i\right)$ jest liczba
$$\pi-\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{4}\right)=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}4\right)=\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}4\,,$$
faktycznie udowodniliśmy nierówności
$$\operatorname{arctg}6+\operatorname{arctg}12<\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}4<\operatorname{arctg}7+\operatorname{arctg}10\,.$$

Zwróćmy też uwagę, że postępując podobnie jak powyżej, strony dowodzonej nierówności można zapisać jako:
$$\operatorname{arctg}6+\operatorname{arctg}12=\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\left(\frac{71}{18}\right)=\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\left(4-\frac{1}{18}\right)$$
oraz
$$\operatorname{arctg}7+\operatorname{arctg}10=\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\left(\frac{69}{17}\right)=\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\left(4+\frac{1}{17}\right).$$

Metodami podobnymi do powyższych można udowodnić nierówności równoważne danej w zadaniu nierówności:

$$\mathrm{arctg} 12-\mathrm{arctg} 10=\mathrm{arctg}\left(\frac{2}{121}\right)<\mathrm{arctg}\left(\frac{2}{86}\right)=\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{43}\right)=\mathrm{arctg} 7-\mathrm{arctg} 6\,,$$

$$\mathrm{arctg} 12-\mathrm{arctg} 7=\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{17}\right)=\mathrm{arctg}\left(\frac{4}{68}\right)<\mathrm{arctg}\left(\frac{4}{61}\right)=\mathrm{arctg} 10-\mathrm{arctg} 6$$

oraz

$$\mathrm{arctg} 12-\mathrm{arctg} 10-\mathrm{arctg} 7+\mathrm{arctg} 6=\mathrm{arctg}\left(\frac{7}{1041}\right)>0\,.$$

**715.** Udowodnić istnienie liczby rzeczywistej $x\in(0,2)$ spełniającej nierówność

$$x^{2015}\cdot(x-2)^{2016}>1\,.$$

*Rozwiązanie:*
*Sposób I (dla myślących śmiertelników):*
Rozważmy funkcję $f$ określoną wzorem

$$f(x)=x^{2015}\cdot(x-2)^{2016}\,.$$

Wówczas jej pochodna wyraża się wzorem

$$f'(x)=2015\cdot x^{2014}\cdot(x-2)^{2016}+2016\cdot x^{2015}\cdot(x-2)^{2015}\,.$$

Ponieważ

$$f(1)=1 \qquad \text{oraz} \qquad f'(1)=2015-2016=-1\neq 0\,,$$

funkcja $f$ osiąga w punkcie 1 wartość 1, która nie jest ekstremum lokalnym (bo $f'(1)\neq 0$). W szczególności nie jest to maksimum lokalne, co oznacza, że funkcja $f$ musi osiągać w pobliżu jedynki także wartość większą od 1.

*Sposób II (dla bezmyślnych cudotwórców):*
Rozważmy funkcję $f$ określoną wzorem

$$f(x)=x^{2015}\cdot(x-2)^{2016}\,.$$

Zamiast wyciągać wnioski na podstawie analizy przebiegu powyższej funkcji, bezmyśnie uczepimy się miejsca, w którym pochodna tej funkcji się zeruje, a sama funkcja osiąga maksimum.

Pochodna funkcji $f$ wyraża się wzorem

$$f'(x)=2015\cdot x^{2014}\cdot(x-2)^{2016}+2016\cdot x^{2015}\cdot(x-2)^{2015}=$$
$$=2015\cdot x^{2014}\cdot(2-x)^{2016}-2016\cdot x^{2015}\cdot(2-x)^{2015}=$$
$$=x^{2014}\cdot(2-x)^{2015}\cdot(2015\cdot(2-x)-2016\cdot x)=x^{2014}\cdot(2-x)^{2015}\cdot(4030-4031\cdot x)\,.$$

Zatem na przedziale $(0,2)$ pochodna funkcji $f$ ma następujący znak:

$$f'(x)\begin{cases}>0 & \text{dla} \quad x\in\left(0,\frac{4030}{4031}\right)\\ =0 & \text{dla} \quad x=\frac{4030}{4031}\\ <0 & \text{dla} \quad x\in\left(\frac{4030}{4031},2\right)\end{cases}$$

Oznacza to, że funkcja $f$ osiąga na przedziale $(0,2)$ największą wartość w punkcie $x=\frac{4030}{4031}$ i wartością tą jest

$$f\left(\frac{4030}{4031}\right)=\left(\frac{4030}{4031}\right)^{2015}\cdot\left(\frac{4032}{4031}\right)^{2016}=\frac{4030^{2015}\cdot 4032^{2016}}{4031^{4031}}.$$

Dla zakończenia rozwiązania wystarczy "tylko" udowodnić nierówność $f\left(\frac{4030}{4031}\right)>1$. Problem polega na tym, że w rzeczywistości $f\left(\frac{4030}{4031}\right)\approx 1{,}000124$.

Aby wykazać nierówność $f\left(\frac{4030}{4031}\right)>1$, należałoby udowodnić, że

$$4030^{2015}\cdot 4032^{2016}>4031^{4031}, \qquad (\clubsuit)$$

co jest praktycznie niewyobrażalne bez użycia komputera, gdyż po obu stronach tej nierówności występują liczby 14534-cyfrowe, a ich iloraz jest w przybliżeniu równy 1,000124.

Cudotwórca przepisałby nierówność ($\clubsuit$) w postaci

$$(2n)^n\cdot(2n+2)^{n+1}>(2n+1)^{2n+1},$$

gdzie $n=2015$, a następnie przemnożył ją stronami przez $2n$ otrzymując kolejno nierówności równoważne:

$$(2n)^{n+1}\cdot(2n+2)^{n+1}>(2n+1)^{2n+1}\cdot(2n),$$

$$((2n)\cdot(2n+2))^{n+1}>\left((2n+1)^2\right)^n\cdot(2n+1)\cdot(2n),$$

$$\left(4n^2+4n\right)^{n+1}>\left(4n^2+4n+1\right)^n\cdot\left(4n^2+2n\right). \qquad (\diamondsuit)$$

W tym momencie cudotwórca zauważyłby, że po każdej ze stron nierówności ($\diamondsuit$) znajduje się iloczyn $n+1$ czynników dodatnich. Gdyby sumy czynników po każdej ze stron były równe, większy byłby iloczyn o wszystkich czynnikach równych, czyli iloczyn po lewej stronie nierówności ($\diamondsuit$). Tymczasem jest nawet lepiej, gdyż suma czynników po lewej stronie nierówności ($\diamondsuit$) jest równa

$$\left(4n^2+4n\right)\cdot(n+1)=4n^3+8n^2+4n,$$

a po prawej jest od niej mniejsza i wynosi

$$\left(4n^2+4n+1\right)\cdot n+\left(4n^2+2n\right)=4n^3+8n^2+3n.$$

Dowód nierówności ($\clubsuit$) jest więc zakończony.

*Uwaga:*

Cudotwórca zamiast nierówności ($\diamondsuit$) udowodniłby nierówność mocniejszą, a mianowicie

$$\left(4n^2+4n\right)^{n+1}>\left(4n^2+4n+1\right)^n\cdot\left(4n^2+3n\right),$$

co prowadzi do wzmocnionej wersji nierówności ($\clubsuit$):

$$4030^{2015}\cdot 4032^{2016}>4031^{4030}\cdot 4031{,}5,$$

w której iloraz strony lewej do prawej jest w przybliżeniu równy 1,00000000769 (bezpośrenio po przecinku występuje osiem zer). To doprowadziłoby do nierówności

$$f\left(\frac{4030}{4031}\right)>\frac{4031{,}5}{4031}=1+\frac{1}{8062}\approx\mathbf{1{,}0001240}387,$$

gdy tymczasem w rzeczywistości

$$f\left(\frac{4030}{4031}\right)\approx\mathbf{1{,}0001240}463.$$