Wyznaczyć wartości granic ciągów:

385. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_2(n+8)}{\log_2 n} = \mathbf{1}$

386. $\lim\limits_{n\to\infty} (\log_2(n+8) - \log_2 n) = \mathbf{0}$

387. $\lim\limits_{n\to\infty} \log_n(n+8) = \mathbf{1}$

388. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_2(8n+1)}{\log_2 n} = \mathbf{1}$

389. $\lim\limits_{n\to\infty} (\log_2(8n+1) - \log_2 n) = \mathbf{3}$

390. $\lim\limits_{n\to\infty} \log_n(8n+1) = \mathbf{1}$

391. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_2(n^8+1)}{\log_2 n} = \mathbf{8}$

392. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\log_2\left(n^8+1\right) - \log_2 n\right) = \mathbf{+\infty}$

393. $\lim\limits_{n\to\infty} \log_n\left(n^8+1\right) = \mathbf{8}$

394. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = a\{x\}^3 + b\{x\}^2 + c\{x\} + d\,,$$

gdzie $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x.

W każdym z podpunktów uzupełnij brakującą liczbę tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczba o żądanej własności nie istnieje.

a) $a = \mathbf{-5}$, $b=2$, $c=3$, $d=4$

b) $a=1$, $b = \mathbf{-4}$, $c=3$, $d=4$

c) $a=1$, $b=2$, $c=\mathbf{-3}$, $d=4$

d) $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=$**NIE**

395. Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = \sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}\,.$$

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$x^4+x^3+x^2 = x^4+x^3+\frac{x^2}{4}+\frac{3\cdot x^2}{4} = \left(x^2+\frac{x}{2}\right)^2+\frac{3\cdot x^2}{4} \geqslant 0\,,$$

skąd wynika, że funkcja f jest określona na całej prostej rzeczywistej. Ponieważ funkcja f jest ciągła, nie ma ona asymptot pionowych.

Przystępujemy więc do próby wyzanaczenia asymptot ukośnych/poziomych.

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[4]{\frac{x^4+x^3+x^2}{x^4}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=1\,.$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^4+x^3+x^2)-x^4}{\left(\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}+x\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+x^3+x^2}+x^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2}{\left(\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}+x\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+x^3+x^2}+x^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^{-1}}{\left(\sqrt[4]{1+x^{-1}+x^{-2}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+x^{-1}+x^{-2}}+1\right)}=\frac{1}{(1+1)\cdot(1+1)}=\frac{1}{4}\,.$$

W powyższych rachunkach skorzystaliśmy ze wzoru

$$s-t=\frac{s^4-t^4}{(s+t)\cdot(s^2+t^2)}\,.$$

Wyznaczając asymptotę przy $x\to-\infty$ pamiętamy, że w tym przypadku należy przyjąć założenie $x<0$, a w konsekwencji $x=-|x|=-\sqrt[4]{x^4}$.

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}}{-\sqrt[4]{x^4}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt[4]{\frac{x^4+x^3+x^2}{x^4}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=-1\,.$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}+x\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^4+x^3+x^2)-x^4}{\left(\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+x^3+x^2}+x^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+x^2}{\left(\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+x^3+x^2}+x^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+x^{-1}}{\left(\frac{\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}}{x}-1\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x^4+x^3+x^2}}{x^2}+1\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+x^{-1}}{\left(\frac{\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}}{-\sqrt[4]{x^4}}-1\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x^4+x^3+x^2}}{\sqrt{x^4}}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+x^{-1}}{\left(-\sqrt[4]{1+x^{-1}+x^{-2}}-1\right)\cdot\left(\sqrt{1+x^{-1}+x^{-2}}+1\right)}=\frac{1}{(-1-1)\cdot(1+1)}=-\frac{1}{4}\,.$$

Tym razem skorzystaliśmy ze wzoru

$$s+t=\frac{s^4-t^4}{(s-t)\cdot(s^2+t^2)}\,.$$

Odpowiedź: Dana funkcja ma w $+\infty$ asymptotę ukośną o równaniu $y=x+\frac{1}{4}$, natomiast w $-\infty$ asymptotę ukośną o równaniu $y=-x-\frac{1}{4}$.

396. W każdym z zadań **396.1-396.16** podaj granicę funkcji.

396.1. $\lim\limits_{x\to-\infty}2^x=\mathbf{0}$

396.2. $\lim\limits_{x\to-\infty}2^{2^x}=\mathbf{1}$

396.3. $\lim\limits_{x\to-\infty}2^{2^{2^x}}=\mathbf{2}$

396.4. $\lim\limits_{x\to-\infty}2^{2^{2^{2^x}}}=\mathbf{4}$

396.5. $\lim\limits_{x\to-\infty}2^{2^{2^{2^{2^x}}}}=\mathbf{16}$

396.6. $\lim\limits_{x\to-\infty}2^{3^{4^x}}=\mathbf{2}$

396.7. $\lim\limits_{x\to-\infty}4^{3^{2^x}}=\mathbf{4}$

396.8. $\lim\limits_{x\to-\infty}2^{3^{4^{5^x}}}=\mathbf{8}$

396.9. $\lim\limits_{x\to-\infty}3^{4^{5^{6^x}}}=\mathbf{81}$

396.10. $\lim\limits_{x\to-\infty}3^{2^{2^{4^{5^x}}}}=\mathbf{81}$

396.11. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\mathbf{1/2}$

396.12. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)=\mathbf{1}$

396.13. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}-x\right)=\mathbf{1/3}$

396.14. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+2x^2}-x\right)=\mathbf{2/3}$

396.15. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^7+x^6)}{\ln x}=\mathbf{7}$

396.16. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^7+2x^6)}{\ln x}=\mathbf{7}$

397. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=a\cdot\{2x\}+b\cdot\{2x+1\}+c\cdot\{x\}+d\cdot\left\{x+\frac{1}{2}\right\},$$

gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y.

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

a) $a=1$, $b=2$, $c=$ **−3**, $d=$ **−3**

b) $a=$ **−5**, $b=2$, $c=3$, $d=$ **3**

c) $a=$ **NIE**, $b=$ **NIE**, $c=3$, $d=4$

d) $a=2$, $b=3$, $c=$ **−5**, $d=$ **−5**

e) $a=$ **−9**, $b=3$, $c=6$, $d=$ **6**

f) $a=$ **dowolne**, $b=$ **−6−a**, $c=6$, $d=6$