11. Pochodne wyższych rzędów.

W kolejnych zadaniach f i g są funkcjami różniczkowalnymi na wspólnej dziedzinie (będącej przedziałem) tyle razy, ile potrzeba. Gwiazdka oznacza, że trzeba wykreślić jeden z wariantów podanych w nawiasie.

723. Dowieść, że jeżeli równanie $f(x)=g(x)$ ma n rozwiązań, to równanie

$$f^{(k)}(x)=g^{(k)}(x)$$

ma co (najmniej/najwyżej)* $(n+k/n-k)^*$ rozwiązań.

724. Dowieść, że jeżeli równanie

$$f^{(k)}(x)=g^{(k)}(x)$$

ma n rozwiązań, to równanie $f(x)=g(x)$ ma co (najmniej/najwyżej)* $(n+k/n-k)^*$ rozwiązań.

725. Dowieść, że jeżeli równanie $f(x)=g(x)$ ma n pierwiastków (liczonych z krotnościami), to równanie

$$f^{(k)}(x)=g^{(k)}(x)$$

ma co (najmniej/najwyżej)* $(n+k/n-k)^*$ pierwiastków (liczonych z krotnościami).

Uwaga: Pierwiastek p-krotny równania $f(x)=g(x)$ to taka liczba x, że $f^{(i)}(x)=g^{(i)}(x)$ dla $i=0,1,2,\ldots,p-1$ oraz $f^{(p)}(x)\neq g^{(p)}(x)$.

726. Dowieść, że jeżeli równanie

$$f^{(k)}(x)=g^{(k)}(x)$$

ma n pierwiastków (liczonych z krotnościami), to równanie

$$f(x)=g(x)$$

ma co (najmniej/najwyżej)* $(n+k/n-k)^*$ pierwiastków (liczonych z krotnościami).

727. Wyznaczyć liczbę rozwiązań równania $2^x=x^2$.

728. Wyznaczyć liczbę rozwiązań równania $2^x=x^{100}$.

729. Wyznaczyć liczbę rozwiązań równania $2^x=x^{101}$.

730. Dowieść, że $(f(x)g(x))^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$.

731. Na potrzeby tego zadania funkcję dwukrotnie różniczkowalną $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ nazwiemy **superwypukłą**, jeżeli dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność $f''(x)\geqslant 1$.

Dowieść, że dowolna funkcja superwypukła spełnia nierówność

$$f(1)\leqslant\frac{f(0)+f(2)}{2}-\frac{1}{2}\,.$$

Obliczyć przybliżone wartości następujących liczb korzystając z trzech wyrazów (zerowego, pierwszego i drugiego) wzoru Taylora odpowiedniej funkcji f. Oszacować błąd przybliżenia w postaci $(x-x_0)^3\cdot f'''(c)/6$.

732. $\sqrt{79}$ **733.** $\sqrt[4]{e}$ **734.** $\sqrt[3]{126}$ **735.** $\sqrt[7]{126}$ **736.** $\ln 2=\ln(1{,}25^2\cdot 1{,}28)$