Kolokwium nr 11: wtorek 17.01.2017, godz. 9:15-10:00, materiał zad. 1–465.
Kolokwium nr 12: wtorek 24.01.2017, godz. 9:15-10:00, materiał zad. 1–486.

10. Pochodna funkcji – twierdzenie Lagrange'a, znajdowanie najmniejszej i największej wartości funkcji na przedziale domkniętym, reguła de l'Hospitala.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 11,16,18,23.01.2017 (grupy 2–5).

W następującym zadaniu wykorzystać twierdzenie Lagrange'a oraz własność Darboux funkcji ciągłych (przypomnienie: funkcja różniczkowalna jest ciągła).

442. Funkcje $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_{12}$ są określone i różniczkowalne na całej prostej rzeczywistej, a ich pochodne są ciągłe. Ponadto
$f_1(3)=1,\ f_1(5)=2,$
$f_2(0)=3,\ f_2(4)=-1,$
$f_3(-5)=0,\ f_3(15)=10,$
$f_4(1)=2,\ \underset{x}{\forall} f_4'(x)\neq 1,$
$f_5(0)=0,\ f_5(2)=10,\ \underset{x}{\forall} f_5'(x)\neq 2,$
$f_6(0)=7,\ \underset{x}{\forall} f_6'(x)>2,$
$f_7(3)=5,\ \underset{x}{\forall} f_7'(x)\geqslant -1,$
$f_8(-2)=0,\ f_8(0)=10,\ f_8(3)=4,$
$f_9(-1)=0,\ f_9(1)=100,\ f_9'(3)=40,$
$f_{10}(1)=-5,\ f_{10}(11)=5,\ \underset{x}{\forall}\ 0<f_{10}'(x)<2,$
$f_{11}(0)=0,\ f_{11}(100)=0,\ \underset{x}{\forall}\ -1<f_{11}'(x)<2,$
$f_{12}(-100)=-100,\ f_{12}(100)=100,\ \underset{x}{\forall}\ -100<f_{12}'(x)<100.$

A) Dowieść, że dla co najmniej trzech funkcji f_i zachodzi warunek
$$\underset{x}{\forall}\ f_i'(x)\neq 0$$
B) Dowieść, że dla co najmniej dwóch funkcji f_i zachodzi warunek
$$\underset{c}{\exists}\ f_i'(c)=-1$$
C) Dowieść, że dla co najmniej siedmiu funkcji f_i zachodzi warunek
$$f_i(0)\neq 1$$
D) Dowieść, że dla co najmniej czterech funkcji f_i zachodzi warunek
$$f_i(99)>0$$
E) Dowieść, że dla co najmniej dwóch funkcji f_i zachodzi warunek
$$\underset{c}{\exists}\ f_i'(c)=5$$
F) Dowieść, że dla co najmniej jednej funkcji f_i zachodzi warunek
$$\underset{c}{\exists}\ f_i'(c)=44$$

G) Dowieść, że dla co najmniej trzech funkcji f_i zachodzi warunek

$$\underset{c}{\exists}\ f_i'(c)=\frac{1}{2}$$

H) Dowieść, że dla co najmniej siedmiu funkcji f_i zachodzi warunek

$$f_i(1)\neq 8$$

I) Dowieść, że dla co najmniej czterech funkcji f_i zachodzi warunek

$$\underset{c}{\exists}\ f_i(c)=13$$

J) Dowieść, że dla co najmniej jednej funkcji f_i zachodzi warunek

$$\underset{c\neq d}{\exists}\ f_i(c)=f_i(d)=7$$

K) Dowieść, że dla co najmniej dziewięciu funkcji f_i zachodzi warunek

$$\underset{c,\,d}{\exists}\ f_i(c)=f_i'(d)$$

443. Rozważamy graniastosłupy prawidłowe o podstawie trójkątnej i objętości 1. Który z nich ma najmniejsze pole powierzchni całkowitej?

444. Potrzebna jest kadź w kształcie walca, otwarta u góry, której dno i bok wykonane są z tego samego materiału. Kadź ma mieć pojemność 257 hektolitrów. Jaki powinien być stosunek średnicy dna do wysokości kadzi, aby do jej wykonania potrzeba było jak najmniej materiału?

Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji określonej podanym wzorem w podanym przedziale

445. $x^2+2x+21$, $[-2,7]$ **446.** $|x^2-1|+3x$, $[-2,2]$ **447.** $|x+1|+x^2$, $[-10,10]$

448. $|10x-1|+x^3$, $[0,1]$ **449.** $\ln x-\frac{x}{10}$, $[1,e^3]$ **450.** $|\sin x|+\frac{x}{2}$, $[0,2\pi]$

451. $3\sin x+\sin 3x$, $[0,2\pi]$ **452.** $x^2+x-\sqrt{x^2+x+\frac{1}{4}}$, $\left[-\frac{2}{3},\frac{1}{4}\right]$

453. $x-4\sqrt{x}+\ln x$, $\left[\frac{1}{2},2\right]$ **454.** $-3x+\left(x^2-6x+9\right)^{3/2}$, $[1,5]$

455. Korzystając **z definicji** pochodnej wyprowadzić wzór na pochodną funkcji f określonej wzorem $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.
Uwaga: Nie wolno korzystać z reguły de l'Hospitala lub w inny sposób omijać bezpośrednie korzystanie z definicji pochodnej.

456. Korzystając **z definicji** pochodnej wyprowadzić wzór na pochodną funkcji f określonej wzorem $f(x)=\sqrt[4]{x}$ na przedziale $(0,+\infty)$.

457. W każdym z zadań **457.1-457.7** podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej funkcji w trzech podanych punktach.

457.1. $f_1(x)=\ln\left(x^3+1\right)$

$f_1'(1)=$ .... $f_1'(2)=$ .... $f_1'(3)=$ ....

457.2. $f_2(x)=\mathrm{arctg}\left(x^2\right)$

$f_2'(1)=$ .... $f_2'(2)=$ .... $f_2'(3)=$ ....

457.3. $f_3(x)=\sqrt{24x+1}$

$f_3'(0)=\dots\dots\dots\dots$ $f_3'(1)=\dots\dots\dots\dots$ $f_3'(2)=\dots\dots\dots\dots$

457.4. $f_4(x)=\sqrt[3]{x^3-x+8}$

$f_4'(-1)=\dots\dots\dots\dots$ $f_4'(0)=\dots\dots\dots\dots$ $f_4'(1)=\dots\dots\dots\dots$

457.5. $f_5(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^4-x^2+9}}$

$f_5'(-1)=\dots\dots\dots\dots$ $f_5'(0)=\dots\dots\dots\dots$ $f_5'(1)=\dots\dots\dots\dots$

457.6. $f_6(x)=\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^5-x+32}}$

$f_6'(-1)=\dots\dots\dots\dots$ $f_6'(0)=\dots\dots\dots\dots$ $f_6'(1)=\dots\dots\dots\dots$

457.7. $f_7(x)=\sqrt{8x+1}\cdot\sqrt[3]{7x^2+1}$

$f_7'(0)=\dots\dots\dots\dots$ $f_7'(1)=\dots\dots\dots\dots$ $f_7'(3)=\dots\dots\dots\dots$

458. Udowodnić nierówności $\dfrac{1}{1301}<\mathrm{arctg}51-\mathrm{arctg}49<\dfrac{1}{1201}$.

459. Udowodnić nierówności $\dfrac{1}{9}<\ln 9-\ln 8<\dfrac{1}{8}$.

460. Dana jest funkcja $f:[-4,4]\to\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\sqrt{x^2+9}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x,\,y\in[-4,4]$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{4}{5}\cdot|x-y|\ .$$

461. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=x+\left|x^2-6\right|$$

na przedziale $[-4,3]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

462. Wyznaczyć punkty, w których funkcja f zdefiniowana wzorem

$$f(x)=\frac{x}{99}-\frac{10\cdot\ln(x^2+1)}{99}+\mathrm{arctg}x$$

osiąga najmniejszą i największą wartość na przedziale $[9,11]$.

463. Wyznaczyć punkty, w których funkcja f zdefiniowana wzorem

$$f(x)=\frac{9}{x}-\frac{81}{8x^2}+\ln x$$

osiąga najmniejszą i największą wartość na przedziale $[4,5]$.

464. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=x+\left|x^2-x-12\right|$$

na przedziale $[-5,5]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

465. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=3x+\left|x^3-9x\right|$$

na przedziale $\left[-4,\sqrt{10}\right]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Obliczyć granice

466. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$ **467.** $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1/x}$ **468.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$ **469.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cos x-x^2-2}{x\sin x-x^2}$

470. $\lim\limits_{x\to\infty} xe^{-x}$ **471.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}$ **472.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$ **473.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{e^x}-e}{x}$ **474.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$

475. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$ **476.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x-x+1}{(x-1)^2}$ **477.** $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln\ln x}{x-e}$ **478.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4}{e^x}$ **479.** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^x-4}{x-2}$

480. Niech $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x-1} & \text{dla} \quad x\neq 0\\[2mm] A & \text{dla} \quad x=0\end{cases}$.

Dla którego A istnieje $f'(0)$ i ile jest równa?

481. Niech $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-\pi^2}{\sin x} & \text{dla} \quad x\notin\{k\pi; k\in\mathbb{Z}\}\\[2mm] A_k & \text{dla} \quad x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$.

Dla których A_k $(k\in\mathbb{Z})$ istnieją $f'(k\pi)$ i ile są równe?

482. Niech $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x-1}{\cos^2 x} & \text{dla} \quad x\notin\{k\pi+\frac{\pi}{2}; k\in\mathbb{Z}\}\\[2mm] A_k & \text{dla} \quad x=k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$.

Dla których A_k $(k\in\mathbb{Z})$ istnieją $f'(k\pi+\frac{\pi}{2})$ i ile są równe?

483. Niech $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{\sin(\pi x)} & \text{dla} \quad x\notin\mathbb{Z}\\[2mm] x^2-2x & \text{dla} \quad x\in\mathbb{Z}\end{cases}$.

Obliczyć $f'(x)$ dla tych $x\in\mathbb{Z}$, dla których istnieje.

484. Niech $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos(\pi x)+1}{\sin(\pi x)} & \text{dla} \quad x\notin\mathbb{Z}\\[2mm] x^3-x & \text{dla} \quad x\in\mathbb{Z}\end{cases}$.

Obliczyć $f'(x)$ dla tych $x\in\mathbb{Z}$, dla których istnieje.

485. Niech $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{3x}-3e^x+2}{x^2} & \text{dla} \quad x\neq 0\\[2mm] A & \text{dla} \quad x=0\end{cases}$.

Dla którego A istnieje $f'(0)$ i ile jest równa?

486. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A, że funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1+\ln(1-x)}{x^3} & \text{dla} \quad x\neq 0\\[2mm] A & \text{dla} \quad x=0\end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A.