455. Korzystając **z definicji** pochodnej wyprowadzić wzór na pochodną funkcji f określonej wzorem $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.
Uwaga: Nie wolno korzystać z reguły de l'Hospitala lub w inny sposób omijać bezpośrednie korzystanie z definicji pochodnej.

Rozwiązanie:

Stosując definicję pochodnej oraz wzór na różnicę kwadratów otrzymujemy:

$$f'(x)=\lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=\lim_{y\to x}\frac{\sqrt{y^2+1}-\sqrt{x^2+1}}{y-x}=\lim_{y\to x}\frac{y^2-x^2}{\left(\sqrt{y^2+1}+\sqrt{x^2+1}\right)\cdot(y-x)}=$$

$$=\lim_{y\to x}\frac{(y-x)\cdot(y+x)}{\left(\sqrt{y^2+1}+\sqrt{x^2+1}\right)\cdot(y-x)}=\lim_{y\to x}\frac{y+x}{\sqrt{y^2+1}+\sqrt{x^2+1}}=$$

$$=\frac{x+x}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+1}}=\frac{2\cdot x}{2\cdot\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,.$$

456. Korzystając **z definicji** pochodnej wyprowadzić wzór na pochodną funkcji f określonej wzorem $f(x)=\sqrt[4]{x}$ na przedziale $(0,+\infty)$.

Rozwiązanie:

Stosując definicję pochodnej oraz wzór na różnicę czwartych potęg otrzymujemy:

$$f'(x)=\lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=\lim_{y\to x}\frac{\sqrt[4]{y}-\sqrt[4]{x}}{y-x}=\lim_{y\to x}\frac{y-x}{\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\cdot(y-x)}=$$

$$=\lim_{y\to x}\frac{1}{\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}=\frac{1}{(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{x})\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{x})}=\frac{1}{(2\cdot\sqrt[4]{x})\cdot(2\cdot\sqrt{x})}=\frac{1}{4\cdot\sqrt[4]{x^3}}\,.$$

457. W każdym z zadań **457.1-457.7** podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej funkcji w trzech podanych punktach.

457.1. $f_1(x)=\ln\left(x^3+1\right)$

$f_1'(1)=$ **3/2** $f_1'(2)=$ **4/3** $f_1'(3)=$ **27/28**

457.2. $f_2(x)=\mathrm{arctg}\left(x^2\right)$

$f_2'(1)=$ **1** $f_2'(2)=$ **4/17** $f_2'(3)=$ **3/41**

457.3. $f_3(x)=\sqrt{24x+1}$

$f_3'(0)=$ **12** $f_3'(1)=$ **12/5** $f_3'(2)=$ **12/7**

457.4. $f_4(x)=\sqrt[3]{x^3-x+8}$

$f_4'(-1)=$ **1/6** $f_4'(0)=$ **−1/12** $f_4'(1)=$ **1/6**

457.5. $f_5(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^4-x^2+9}}$

$f_5'(-1)=$ **1/27** $f_5'(0)=$ **0** $f_5'(1)=$ **−1/27**

457.6. $f_6(x)=\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^5-x+32}}$

$f_6'(-1)=\mathbf{-1/80}$ $f_6'(0)=\mathbf{1/320}$ $f_6'(1)=\mathbf{-1/80}$

457.7. $f_7(x)=\sqrt{8x+1}\cdot\sqrt[3]{7x^2+1}$

$f_7'(0)=\mathbf{4}$ $f_7'(1)=\mathbf{37/6}$ $f_7'(3)=\mathbf{303/40}$

458. Udowodnić nierówności $\dfrac{1}{1301}<\operatorname{arctg}51-\operatorname{arctg}49<\dfrac{1}{1201}$.

Rozwiązanie:

Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej rachunku różniczkowego zastosowanego do funkcji $f(x)=\operatorname{arctg}x$ na przedziale $[49,51]$ wynika istnienie takiej liczby $c\in(49,51)$, że

$$\operatorname{arctg}51-\operatorname{arctg}49=(51-49)\cdot f'(c)=2\cdot f'(c)\,.$$

Ponieważ

$$f'(x)=\frac{1}{x^2+1}\,,$$

z nierówności $49<c<51$ otrzymujemy

$$\frac{1}{1301}=\frac{2}{2602}=\frac{2}{51^2+1}\quad<\quad\operatorname{arctg}51-\operatorname{arctg}49=\frac{2}{c^2+1}\quad<\quad\frac{2}{49^2+1}=\frac{2}{2402}=\frac{1}{1201}\,,$$

co kończy dowód nierówności podanych w treści zadania.

459. Udowodnić nierówności $\dfrac{1}{9}<\ln 9-\ln 8<\dfrac{1}{8}$.

Rozwiązanie:

Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej rachunku różniczkowego zastosowanego do funkcji $f(x)=\ln x$ na przedziale $[8,9]$ wynika istnienie takiej liczby $c\in(8,9)$, że

$$\ln 9-\ln 8=f'(c)\,.$$

Ponieważ

$$f'(x)=\frac{1}{x}\,,$$

z nierówności $8<c<9$ otrzymujemy

$$\frac{1}{9}\quad<\quad\ln 9-\ln 8=f'(c)=\frac{1}{c}\quad<\quad\frac{1}{8}\,,$$

co kończy dowód nierówności podanych w treści zadania.

460. Dana jest funkcja $f:[-4,4]\to\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\sqrt{x^2+9}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x,y\in[-4,4]$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{4}{5}\cdot|x-y|\,.$$

Rozwiązanie:

Sposób I:

Należy udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [-4,4]$ zachodzi nierówność

$$\left|\sqrt{x^2+9}-\sqrt{y^2+9}\right| \leqslant \frac{4}{5}\cdot|x-y| .$$

Przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności:

$$\left|\sqrt{x^2+9}-\sqrt{y^2+9}\right| = \left|\sqrt{x^2+9}-\sqrt{y^2+9}\right| \cdot \frac{\sqrt{x^2+9}+\sqrt{y^2+9}}{\sqrt{x^2+9}+\sqrt{y^2+9}} =$$

$$= \frac{|x^2-y^2|}{\sqrt{x^2+9}+\sqrt{y^2+9}} = |x-y|\cdot\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+9}+\sqrt{y^2+9}} .$$

Dowód danej w treści zadania nierówności będzie zakończony, jeśli wykażemy nierówność

$$\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+9}+\sqrt{y^2+9}} \leqslant \frac{4}{5} ,$$

która jest równoważna nierówności

$$|x+y| \leqslant \frac{4}{5}\cdot\left(\sqrt{x^2+9}+\sqrt{y^2+9}\right) .$$

Powyższą nierówność dowodzimy korzystając z nierówności trójkąta, wykorzystując równość $|x|=\sqrt{x^2}$ oraz uwzględniając nierówności $x^2 \leqslant 16$ i $y^2 \leqslant 16$:

$$|x+y| \leqslant |x|+|y| = \sqrt{x^2}+\sqrt{y^2} = \sqrt{\frac{9x^2}{25}+\frac{16x^2}{25}}+\sqrt{\frac{9y^2}{25}+\frac{16y^2}{25}} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{9\cdot16}{25}+\frac{16x^2}{25}}+\sqrt{\frac{9\cdot16}{25}+\frac{16y^2}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}\cdot(x^2+9)}+\sqrt{\frac{16}{25}\cdot(y^2+9)} =$$

$$= \frac{4}{5}\cdot\left(\sqrt{x^2+9}+\sqrt{y^2+9}\right) .$$

Sposób II:

Dla $x=y$ dowodzona nierówność jest oczywista, natomiast przy $x \neq y$ z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej rachunku różniczkowego wynika równość

$$|f(x)-f(y)| = |f'(c)|\cdot|x-y| ,$$

gdzie c leży między x i y. Rozwiązanie zadania będzie zakończone, jeśli wykażemy, że dla dowolnej liczby $x \in [-4,4]$ zachodzi nierówność

$$|f'(x)| \leqslant \frac{4}{5} .$$

Bezpośrednie wyliczenia prowadzą do:

$$|f'(x)| = \left|\frac{2x}{2\cdot\sqrt{x^2+9}}\right| = \left|\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\right| = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+9}} ,$$

co jest oczywiście mniejsze od $4/5$ dla $x=0$, natomiast dla $x \neq 0$ możemy kontynuować oszacowania:

$$\frac{|x|}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}} = \frac{1}{\sqrt{25/16}} = \frac{4}{5} .$$

461. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=x+\left|x^2-6\right|$$

na przedziale $[-4,3]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$\left|x^2-6\right|=\begin{cases} x^2-6 & \text{dla } x\in\left(-\infty,-\sqrt{6}\right]\cup\left[\sqrt{6},+\infty\right) \\ -x^2+6 & \text{dla } x\in\left(-\sqrt{6},\sqrt{6}\right) \end{cases}$$

a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci

$$f(x)=\begin{cases} x+x^2-6 & \text{dla } x\in\left[-4,-\sqrt{6}\right]\cup\left[\sqrt{6},3\right] \\ x-x^2+6 & \text{dla } x\in\left(-\sqrt{6},\sqrt{6}\right) \end{cases}$$

W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-4,3]$ jest dana wzorem

$$f'(x)=\begin{cases} 1+2x & \text{dla } x\in\left(-4,-\sqrt{6}\right)\cup\left(\sqrt{6},3\right) \\ 1-2x & \text{dla } x\in\left(-\sqrt{6},\sqrt{6}\right) \end{cases}$$

W punktach $-\sqrt{6}$ i $\sqrt{6}$ pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć te punkty do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f.

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x\in\left(-4,-\sqrt{6}\right)\cup\left(\sqrt{6},3\right)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do równania $1+2x=0$, co ma rozwiązanie $x=-1/2$, które jednak nie należy do rozważanego zbioru $\left(-4,-\sqrt{6}\right)\cup\left(\sqrt{6},3\right)$.

2° W przypadku $x\in\left(-\sqrt{6},\sqrt{6}\right)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do $1-2x=0$, co ma rozwiązanie $x=1/2$, które należy do rozważanego przedziału $\left(-\sqrt{6},\sqrt{6}\right)$.

Porównamy wartości funkcji f w pięciu punktach:

- końce przedziału: -4 i 3,
- miejsce zerowe pochodnej: $1/2$,
- punkty, w których podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: $-\sqrt{6}$ i $\sqrt{6}$.

$$\begin{gathered} f(-4)=6\,, \\ f\left(-\sqrt{6}\right)=-\sqrt{6}\,, \\ f(1/2)=6{,}25\,, \\ f\left(\sqrt{6}\right)=\sqrt{6}\,, \\ f(3)=6\,. \end{gathered}$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą $-\sqrt{6}$ w punkcie $-\sqrt{6}$, a wartość największą równą $6{,}25=25/4$ w punkcie $1/2$.

462. Wyznaczyć punkty, w których funkcja f zdefiniowana wzorem

$$f(x)=\frac{x}{99}-\frac{10\cdot\ln(x^2+1)}{99}+\mathrm{arctg}x$$

osiąga najmniejszą i największą wartość na przedziale $[9,11]$.

Rozwiązanie:

Różniczkujemy funkcję f i korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy:

$$f'(x)=\frac{1}{99}-\frac{10\cdot 2x}{99\cdot(x^2+1)}+\frac{1}{x^2+1}=\frac{x^2+1}{99\cdot(x^2+1)}-\frac{20x}{99\cdot(x^2+1)}+\frac{99}{99\cdot(x^2+1)}=$$

$$=\frac{x^2-20x+100}{99\cdot(x^2+1)}=\frac{(x-10)^2}{99\cdot(x^2+1)}\geqslant 0\,,$$

przy czym w ostatniej nierówności równość zachodzi tylko dla $x=10$. Ponieważ w interesującym nas przedziale pochodna funckji f jest dodatnia za wyjątkiem jednego punktu, w którym ma wartość zero, funkcja f jest w tym przedziale rosnąca.

Odpowiedź: Funkcja f osiąga wartość najmniejszą na początku przedziału, czyli w punkcie 9, a największą na końcu, czyli w punkcie 11.

Uwaga: Na ogół w tego typu zadaniu nie badalibyśmy znaku pochodnej, a jedynie porównalibyśmy wartości funkcji na końcach przedziału i w miejscach zerowania się pochodnej. Jednak w tym wypadku jest to praktycznie niewykonalne bez użycia kalkulatora, mamy bowiem:

$$f(9)=\frac{1}{11}-\frac{10\cdot\ln 82}{99}+\mathrm{arctg}9\approx\mathbf{1{,}10592}5\,,$$

$$f(10)=\frac{10}{99}-\frac{10\cdot\ln 101}{99}+\mathrm{arctg}10\approx\mathbf{1{,}10596}4\,,$$

$$f(11)=\frac{1}{9}-\frac{10\cdot\ln 122}{99}+\mathrm{arctg}11\approx\mathbf{1{,}10599}3\,.$$

463. Wyznaczyć punkty, w których funkcja f zdefiniowana wzorem

$$f(x)=\frac{9}{x}-\frac{81}{8x^2}+\ln x$$

osiąga najmniejszą i największą wartość na przedziale $[4,5]$.

Rozwiązanie:

Różniczkujemy funkcję f i korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy:

$$f'(x)=-\frac{9}{x^2}+\frac{81}{4x^3}+\frac{1}{x}=\frac{1}{x}-\frac{9}{x^2}+\frac{81}{4x^3}=\frac{4x^2-36x+81}{4x^3}=\frac{(2x-9)^2}{4x^3}\geqslant 0\,,$$

przy czym w ostatniej nierówności równość zachodzi tylko dla $x=9/2$. Ponieważ w interesującym nas przedziale pochodna funckji f jest dodatnia za wyjątkiem jednego punktu, w którym ma wartość zero, funkcja f jest w tym przedziale rosnąca.

Odpowiedź: Funkcja f osiąga wartość najmniejszą na początku przedziału, czyli w punkcie 4, a największą na końcu, czyli w punkcie 5.

Uwaga: Na ogół w tego typu zadaniu nie badalibyśmy znaku pochodnej, a jedynie porównalibyśmy wartości funkcji na końcach przedziału i w miejscach zerowania się pochodnej. Jednak w tym wypadku jest to praktycznie niewykonalne bez użycia kalkulatora, mamy bowiem:

$$f(4)=\frac{207}{128}+\ln 4\approx 3{,}00348\,,$$

$$f(9/2)=\frac{3}{2}+\ln(9/2)\approx 3{,}00408\,,$$

$$f(5)=\frac{279}{200}+\ln 5\approx 3{,}00444\,.$$

464. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=x+\left|x^2-x-12\right|$$

na przedziale $[-5,5]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$x^2-x-12=(x-4)\cdot(x+3)\,.$$

Stąd

$$\left|x^2-x-12\right|=\begin{cases} x^2-x-12 & \text{dla} \quad x\in(-\infty,-3]\cup[4,+\infty) \\ -x^2+x+12 & \text{dla} \quad x\in(-3,4) \end{cases}$$

a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci

$$f(x)=\begin{cases} x^2-12 & \text{dla} \quad x\in[-5,-3]\cup[4,5] \\ -x^2+2x+12 & \text{dla} \quad x\in(-3,4) \end{cases}$$

W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-5,5]$ jest dana wzorem

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & \text{dla} \quad x\in(-5,-3)\cup(4,5) \\ -2x+2 & \text{dla} \quad x\in(-3,4) \end{cases}$$

W punktach -3 i 4 pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć te punkty do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f.

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x\in(-5,-3)\cup(4,5)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do $2x=0$, co ma rozwiązanie $x=0$, które jednak nie należy do rozważanego zbioru $(-5,-3)\cup(4,5)$.

2° W przypadku $x\in(-3,4)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do $-2x+2=0$, co ma rozwiązanie $x=1$, które należy do rozważanego przedziału $(-3,4)$.

Porównamy wartości funkcji f w pięciu punktach:

• końce przedziału: -5 i 5,

• miejsce zerowe pochodnej: 1,
• punkty, w których podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: -3 i 4.

$$f(-5)=13\,,$$
$$f(-3)=-3\,,$$
$$f(1)=13\,,$$
$$f(4)=4\,,$$
$$f(5)=13\,.$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą -3 w punkcie -3, a wartość największą równą 13 w punktach -5, 1 i 5.

465. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem
$$f(x)=3x+\left|x^3-9x\right|$$
na przedziale $\left[-4,\sqrt{10}\right]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.
Rozwiązanie:
Zauważmy, że
$$x^3-9x=(x-3)\cdot x\cdot(x+3)\,.$$
Stąd
$$\left|x^3-9x\right|=\begin{cases} x^3-9x & \text{dla } x\in[-3,0]\cup[3,+\infty) \\ -x^3+9x & \text{dla } x\in(-\infty,-3)\cup\in(0,3) \end{cases}$$
a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci
$$f(x)=\begin{cases} x^3-6x & \text{dla } x\in[-3,0]\cup\left[3,\sqrt{10}\right] \\ -x^3+12x & \text{dla } x\in[-4,-3)\cup\in(0,3) \end{cases}$$
W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $\left[-4,\sqrt{10}\right]$ jest dana wzorem
$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2-6 & \text{dla } x\in(-3,0)\cup\left(3,\sqrt{10}\right) \\ -3x^2+12 & \text{dla } x\in(-4,-3)\cup\in(0,3) \end{cases}$$
W punktach -3, 0 i 3 pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć te punkty do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f.

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x\in(-3,0)\cup\left(3,\sqrt{10}\right)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do $3x^2=6$, co ma dwa rozwiązania $x=\pm\sqrt{2}$, z których tylko jedno, a mianowicie $x=-\sqrt{2}$, należy do rozważanego zbioru $(-3,0)\cup\left(3,\sqrt{10}\right)$.

2° W przypadku $x\in(-4,-3)\cup\in(0,3)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do $3x^2=12$, co ma dwa rozwiązania $x=\pm2$, z których tylko jedno, a mianowicie $x=2$, należy do rozważanego zbioru $(-4,-3)\cup\in(0,3)$.

Porównamy wartości funkcji f w siedmiu punktach:
• końce przedziału: -4 i $\sqrt{10}$,
• miejsca zerowe pochodnej: $-\sqrt{2}$ i 2,
• punkty, w których podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: -3, 0 i 3.

$$f(-4)=16\,,\qquad f(-3)=-9\,,\qquad f(0)=13\,,\qquad f(2)=16\,,\qquad f(3)=9\,,$$

$$f\left(-\sqrt{2}\right)=\left(-\sqrt{2}\right)^3+6\cdot\sqrt{2}=-2\cdot\sqrt{2}+6\cdot\sqrt{2}=4\cdot\sqrt{2}\in(4,8),\quad \text{bo}\quad \sqrt{2}\in(1,2)\,,$$

$$f\left(\sqrt{10}\right)=\left(\sqrt{10}\right)^3-6\cdot\sqrt{10}=10\cdot\sqrt{10}-6\cdot\sqrt{10}=4\cdot\sqrt{10}\in(12,16),\quad \text{bo}\quad \sqrt{10}\in(3,4)\,.$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą -9 w punkcie -3, a wartość największą równą 16 w punktach -4 i 2.

486. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A, że funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1+\ln(1-x)}{x^3} & \text{dla}\quad x\neq 0\\[2mm] A & \text{dla}\quad x=0\end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A.

Rozwiązanie:

Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{e^h-1+\ln(1-h)}{h^3}-A}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1+\ln(1-h)-Ah^3}{h^4}\,.$$

Przy $h\to 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{e^h-\frac{1}{1-h}-3Ah^2}{4h^3}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{e^h-\frac{1}{(1-h)^2}-6Ah}{12h^2}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz trzeci zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{e^h-\frac{2}{(1-h)^3}-6A}{24h}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{-1-6A}{0}$, co ma postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ dla $A=-1/6$. Wówczas możemy po raz czwarty zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{e^h-\frac{6}{(1-h)^3}}{24}=-\frac{5}{24}\,.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna dla $A=-1/6$ i wówczas $f'(0)=-5/24$.