Kolokwium nr 13: wtorek 31.01.2017, godz. 9:15-10:00, materiał zad. 1–494.

11. Pochodne wyższych rzędów.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 25,30.01.2017 (grupy 2–5).

487. Obliczyć pochodną rzędu 3 funkcji zmiennej x danej wzorem:

487.1. $(x+1)^6$ **487.2.** x^6-4x^3+4 **487.3.** $\frac{1}{1-x}$ **487.4.** $x^3\ln x$ **487.5.** e^{2x-1}

487.6. $\cos x$ **487.7.** $(x^2+1)^3$ **487.8.** e^{x^2} **487.9.** $\ln(x^2)$ **487.10.** $(x-7)^{50}$

488. Wyznaczyć wszystkie takie pary liczb rzeczywistych (a,b), że funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=e^{ax}\cdot\sin(bx)$$

jest równa swojej pochodnej trzeciego rzędu.

489. Wyprowadzić wzór na pochodną rzędu 2016 funkcji

$$f(x)=e^x\sin\left(x\sqrt{3}\right).$$

Otrzymany wzór powinien mieć prostą postać, nie zawierającą żadnego ze znaków "$\sum$", "+", "−".

490. Wyprowadzić wzór na pochodną rzędu n funkcji zmiennej x danej wzorem:

490.1. $\ln(x^{10})$ **490.2.** $x\ln x$ **490.3.** $\sqrt{x}$ **490.4.** $x^2\sin x$ **490.5.** $\frac{1-x}{1+x}$ **490.6.** xe^x

490.7. $\sin 5x$ **490.8.** x^7 **490.9.** e^{4x} **490.10.** $x+\frac{1}{x}$ **490.11.** x^2e^{-x} **490.12.** $\sin^2 x$

491. Niech

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{2x}-e^x}{x} & \text{dla} \quad x\neq 0\\ A & \text{dla} \quad x=0\end{cases}.$$

a) Dla której wartości parametru A istnieje $f'(0)$ i ile jest równa?
b) Dla tej samej wartości parametru A wyznaczyć $f''(0)$.

492. Wyznaczyć punkty przegięcia i przedziały wypukłości/wklęsłości funkcji zmiennej x danej wzorem:

492.1. x^3+2x^2+3x+4 **492.2.** $x^8-x^2+7x-15$ **492.3.** e^{-x^2}

492.4. $\sin^4 x$ **492.5.** $\sqrt{x}-\ln x$ **492.6.** $x^4+\sqrt[4]{x}$

493. Bez korzystania z kalkulatora wstawić w miejsce kropek znak nierówności "<" albo ">" :

493.1. $2\cdot\mathrm{arctg}34$ .... $\mathrm{arctg}33+\mathrm{arctg}35$

493.2. $\sqrt[4]{32}$ .... $\sqrt[4]{1{,}9}+\sqrt[4]{2{,}1}$

493.3. $2 \cdot \sin 47°$ .... $\sin 46° + \sin 48°$

493.4. 512 .... $3{,}99^{3{,}99} + 4{,}01^{4{,}01}$

494. Zbadać, czy funkcja f określona podanym wzorem ma ekstremum (jeśli tak, to jakie: minimum czy maksimum lokalne) w podanym punkcie x_0.

494.1. $f(x) = e^x - x - \dfrac{x^2}{2}$, $x_0 = 0$ **494.2.** $f(x) = e^x - x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6}$, $x_0 = 0$

494.3. $f(x) = \sin x - \ln(1+x)$, $x_0 = 0$ **494.4.** $f(x) = 2\cos x + \ln\left(1+x^2\right)$, $x_0 = 0$

494.5. $f(x) = \operatorname{arctg} x - x$, $x_0 = 0$ **494.6.** $f(x) = \operatorname{arctg} x - \dfrac{x}{2}$, $x_0 = 1$

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 1.02.2017 (grupy 2–5).

495. Uzupełnić znakami "$<$" lub "$>$":
LEMAT: Niech a będzie liczbą rzeczywistą i niech $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będą takimi funkcjami różniczkowalnymi, że $f(a) = g(a)$.
Jeżeli dla każdego $x > a$ zachodzi nierówność $f'(x) < g'(x)$, to dla dowolnego $x > a$ prawdziwa jest nierówność $f(x)$ ..... $g(x)$.
Jeżeli dla każdego $x < a$ zachodzi nierówność $f'(x) < g'(x)$, to dla dowolnego $x < a$ prawdziwa jest nierówność $f(x)$ ..... $g(x)$.

496. Uzupełnić znakami "$<$" lub "$>$":
LEMAT: Niech a będzie liczbą rzeczywistą i niech $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będą takimi funkcjami dwukrotnie różniczkowalnymi, że $f(a) = g(a)$ oraz $f'(a) = g'(a)$.
Jeżeli dla każdego $x > a$ zachodzi nierówność $f''(x) < g''(x)$, to dla dowolnego $x > a$ prawdziwa jest nierówność $f(x)$ ..... $g(x)$.
Jeżeli dla każdego $x < a$ zachodzi nierówność $f''(x) < g''(x)$, to dla dowolnego $x < a$ prawdziwa jest nierówność $f(x)$ ..... $g(x)$.

497. Uzupełnić znakami "$<$" lub "$>$":
LEMAT: Niech $a < b$ będą liczbami rzeczywistymi i niech $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będą takimi funkcjami dwukrotnie różniczkowalnymi, że $f(a) = g(a)$ oraz $f(b) = g(b)$.
Jeżeli dla każdego $x \in (a, b)$ zachodzi nierówność $f''(x) < g''(x)$, to dla dowolnego $x \in (a, b)$ prawdziwa jest nierówność $f(x)$ ..... $g(x)$.
Jeżeli dla każdego $x \in (a, b)$ zachodzi nierówność $f''(x) > g''(x)$, to dla dowolnego $x \in (a, b)$ prawdziwa jest nierówność $f(x)$ ..... $g(x)$.

498. Wstawić znak "$<$" albo "$>$" i udowodnić powstałą nierówność:

498.1. $\ln(x+1)$ ..... x dla $x > 0$

498.2. $\ln(x+1)$ ..... $x - \dfrac{x^2}{2}$ dla $x > 0$

498.3. $\ln(x+1)$ ..... x dla $-1 < x < 0$

498.4. $\ln(x+1)$ ..... $x-\frac{x^2}{2}$ dla $-1<x<0$

498.5. $\ln(x+1)$ ..... $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$ dla $x>0$

498.6. $\ln(x+1)$ ..... $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$ dla $-1<x<0$

498.7. $\ln(x+1)$ ..... $\frac{x}{2}$ dla $0<x<2$

498.8. $\mathrm{arctg} x$ ..... x dla $x>0$

498.9. $\mathrm{arctg} x$ ..... $\frac{4x}{\pi}$ dla $0<x<1$

498.10. $\sin x$ ..... x dla $x>0$

498.11. $\cos x$ ..... $1-\frac{x^2}{2}$ dla $x>0$

498.12. $\sin x$ ..... $x-\frac{x^3}{6}$ dla $x>0$

498.13. $\cos x$ ..... $1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$ dla $x>0$

498.14. $\sin x$ ..... $\frac{2x}{\pi}$ dla $0<x<\frac{\pi}{2}$

498.15. $\sin x$ ..... $\frac{3x}{\pi}$ dla $0<x<\frac{\pi}{6}$

499. Funkcja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ma w przedziale $D_f=[a,b]$ ciągłe pochodne do rzędu trzeciego włącznie (na końcach przedziału ma pochodne jednostronne równe odpowiednim granicom jednostronnym odpowiednich pochodnych).

a) Czy funkcja f ma w punkcie a ekstremum (jeśli tak, to jakie: minimum czy maksimum lokalne), jeżeli:
(i) $f'(a^+)>0$
(ii) $f'(a^+)<0$
(iii) $f'(a^+)=0, \quad f''(a^+)>0$
(iv) $f'(a^+)=0, \quad f''(a^+)<0$
(v) $f'(a^+)=f''(a^+)=0, \quad f'''(a^+)>0$
(vi) $f'(a^+)=f''(a^+)=0, \quad f'''(a^+)<0$

b) Czy funkcja f ma w punkcie b ekstremum (jeśli tak, to jakie: minimum czy maksimum lokalne), jeżeli:
(vii) $f'(b^-)>0$
(viii) $f'(b^-)<0$
(ix) $f'(b^-)=0, \quad f''(b^-)>0$
(x) $f'(b^-)=0, \quad f''(b^-)<0$
(xi) $f'(b^-)=f''(b^-)=0, \quad f'''(b^-)>0$
(xii) $f'(b^-)=f''(b^-)=0, \quad f'''(b^-)<0$