

Egzamin, 21.06.2017, godz. 9:00-13:20**Zadanie 11. (10 punktów)**Obliczyć całkę nieoznaczoną $\int x^2 \cdot \sqrt[3]{x+1} dx$.*Rozwiązanie:*Wykonując podstawienie $t = \sqrt[3]{x+1}$, czyli $x = t^3 - 1$ i formalnie $dx = 3t^2 dt$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int x^2 \cdot \sqrt[3]{x+1} dx &= \int (t^3 - 1)^2 \cdot t \cdot 3t^2 dt = 3 \cdot \int t^9 - 2t^6 + t^3 dt = 3 \cdot \left(\frac{t^{10}}{10} - \frac{2t^7}{7} + \frac{t^4}{4} \right) + C = \\ &= \frac{3t^{10}}{10} - \frac{6t^7}{7} + \frac{3t^4}{4} + C = \frac{3 \cdot (x+1)^{10/3}}{10} - \frac{6 \cdot (x+1)^{7/3}}{7} + \frac{3 \cdot (x+1)^{4/3}}{4} + C. \end{aligned}$$

Zadanie 12. (10 punktów)

Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_1^e x^2 \cdot \ln x \, dx.$$

Rozwiązanie:

Wykonując całkowanie przez części otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int_1^e x^2 \cdot \ln x \, dx &= \frac{x^3}{3} \cdot \ln x \Big|_{x=1}^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} \cdot \int_1^e x^2 \, dx = \frac{e^3}{3} - \left(\frac{x^3}{9} \Big|_{x=1}^e \right) = \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka ma wartość $\frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9}$.

Zadanie 13. (10 punktów)

Obliczyć wartość całki niewłaściwej $\int_7^{\infty} \frac{dx}{x^3+x}$ lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{1}{x^3+x} = \frac{1}{(x^2+1) \cdot x} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x},$$

$$1 = (Ax+B) \cdot x + C \cdot (x^2+1),$$

$$1 = Ax^2 + Bx + Cx^2 + C,$$

$$\begin{cases} 0 &= A+C \\ 0 &= B \\ 1 &= C \end{cases}$$

Stąd otrzymujemy $A = -1$.

Wobec tego

$$\begin{aligned} \int_7^{\infty} \frac{dx}{x^3+x} &= \int_7^{\infty} -\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x} dx = -\frac{\ln(x^2+1)}{2} + \ln|x| \Big|_{x=7}^{\infty} = \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{\ln(x^2+1)}{2} + \ln x \right) \right) + \frac{\ln 50}{2} - \ln 7 = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}} \right) + \frac{\ln 50}{2} - \ln 7 = \\ &= \left(\ln \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{1+x^{-2}}} \right) + \frac{\ln 50}{2} - \ln 7 = \ln 1 + \frac{\ln 50}{2} - \ln 7 = \frac{\ln 50}{2} - \ln 7. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka jest zbieżna i ma wartość $\frac{\ln 50}{2} - \ln 7$.

Uwaga: Poprawne wykonanie przejścia granicznego jest istotną częścią zadania. Bez tego rozwiązanie, nawet przy poprawnym wyniku liczbowym, nie może być ocenione na więcej niż 4 punkty.

Zadanie 14. (10 punktów)

Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n \cdot \binom{3n}{n} \cdot x^{3n}}{n! \cdot 2^n}. \quad (1)$$

*Rozwiązanie:*Stosujemy kryterium d'Alemberta do szeregu (1) traktowanego jako szereg liczbowy z parametrem $x \neq 0$.

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \left| \frac{(n+1)^{n+1} \cdot \binom{3n+3}{n+1} \cdot x^{3n+3}}{(n+1)! \cdot 2^{n+1}} \cdot \frac{n! \cdot 2^n}{n^n \cdot \binom{3n}{n} \cdot x^{3n}} \right| &= \left| \frac{(n+1) \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot x^3 \cdot \binom{3n+3}{n+1}}{(n+1) \cdot 2} \cdot \frac{1}{\binom{3n}{n}} \right| = \\ &= \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot |x|^3}{2} \cdot \frac{(3n+1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+3)}{(n+1) \cdot (2n+1) \cdot (2n+2)} \rightarrow \frac{27e \cdot |x|^3}{8} \end{aligned}$$

przy $n \rightarrow \infty$.Tak więc zastosowanie kryterium d'Alemberta prowadzi do granicy ilorazów kolejnych wyrazów szeregu (1) równej $\frac{27e \cdot |x|^3}{8}$.Jeżeli $\frac{27e \cdot |x|^3}{8} < 1$, czyli $|x| < \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{e}}$, to szereg (1) jest zbieżny.Jeżeli zaś $\frac{27e \cdot |x|^3}{8} > 1$, czyli $|x| > \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{e}}$, to szereg (1) jest rozbieżny.Stąd wniosek, że promień zbieżności szeregu potęgowego (1) jest równy $\frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{e}}$.**Odpowiedź:** Dany w zadaniu szereg potęgowy ma promień zbieżności $\frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{e}}$.

Zadanie 15. (10 punktów)

Udowodnić zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} ((-1)^n \cdot (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}))$.

Przypomnienie: Starannie sformułuj kryteria, z których korzystasz.

Rozwiązanie:

Aby udowodnić zbieżność szeregu danego w treści zadania, skorzystamy z kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych, które wymaga spełnienia następujących trzech warunków:

- 1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne.
- 2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.
- 3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.

Warunki te stają się oczywiste po zapisaniu wartości bezwzględnych wyrazów szeregu w innej postaci:

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

W konsekwencji szereg dany w treści zadania jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

Zadanie 16. (10 punktów)

Niech $a_n = \frac{n+3}{n+1}$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Udowodnić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (2^{2^{a_n}} - 2^{2^{a_{n+1}}})$ jest zbieżny i wyznaczyć jego sumę.

Rozwiązanie:

Odnajdujemy najpierw, że $a_1 = 2$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

Zauważmy, że sumy częściowe szeregu danego w tezie zadania dają się zapisać następującym wzorem:

$$S_N = \sum_{n=1}^N (2^{2^{a_n}} - 2^{2^{a_{n+1}}}) = 2^{2^{a_1}} - 2^{2^{a_{N+1}}} = 2^{2^1} - 2^{2^{a_{N+1}}} = 16 - 2^{2^{a_{N+1}}}.$$

Wobec tego

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2^{2^{a_n}} - 2^{2^{a_{n+1}}}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N (2^{2^{a_n}} - 2^{2^{a_{n+1}}}) = \lim_{N \rightarrow \infty} (16 - 2^{2^{a_{N+1}}}) = 16 - 2^{2^1} = 16 - 4 = 12.$$

Odpowiedź: Szereg dany w treści zadania ma sumę 12.

Zadanie 21. (10 punktów)

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k^2}.$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy sumę występującą pod znakiem granicy:

$$\sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k^2} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1+k/n}{1+(k/n)^2} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right),$$

gdzie $f(x) = \frac{1+x}{1+x^2}$.

Ponieważ funkcja f jest całkowalna jako funkcja ciągła, jej sumy Riemanna odpowiadające ciągowi podziałów przedziału całkowania na przedziały równej długości dążą do całki oznaczonej:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) &= \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2} dx = \arctg x + \frac{\ln(1+x^2)}{2} \Bigg|_{x=0}^1 = \\ &= \arctg 1 + \frac{\ln 2}{2} - \arctg 0 - \frac{\ln 2}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}. \end{aligned}$$

Otrzymujemy więc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k^2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}.$$

Zadanie 22. (10 punktów)

Udowodnić zbieżność całki niewłaściwej $\int_0^{\infty} \frac{x^{\pi} dx}{\sqrt{x^9 + x^8}}$.

Rozwiązanie:

Dzieląc przedział całkowania otrzymujemy

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\pi} dx}{\sqrt{x^9 + x^8}} = \int_0^1 \frac{x^{\pi} dx}{\sqrt{x^9 + x^8}} + \int_1^{\infty} \frac{x^{\pi} dx}{\sqrt{x^9 + x^8}}.$$

Wykażemy, że każda z dwóch całek występujących w powyższej sumie jest zbieżna. W tym celu zauważymy, że funkcja podcałkowa jest dodatnia i skorzystamy z kryterium porównawczego dla całek niewłaściwych.

Otrzymujemy

$$\int_0^1 \frac{x^{\pi} dx}{\sqrt{x^9 + x^8}} \leq \int_0^1 \frac{x^{\pi} dx}{\sqrt{0 + x^8}} = \int_0^1 \frac{dx}{x^{4-\pi}} < +\infty,$$

bo $4 - \pi < 1$.

Podobnie

$$\int_1^{\infty} \frac{x^{\pi} dx}{\sqrt{x^9 + x^8}} \leq \int_1^{\infty} \frac{x^{\pi} dx}{\sqrt{x^9 + 0}} = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{4,5-\pi}} < +\infty,$$

bo $4,5 - \pi > 1$.

Zadanie 23. (10 punktów)

Wiadomo, że dla funkcji różniczkowalnej $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $0 \leq a < b$, pole powierzchni powstałej przez obrót krzywej

$$\{(x, f(x)) : x \in [a, b]\}$$

wokół osi OY jest równe

$$2\pi \cdot \int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Wyznaczyć pole powierzchni

$$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = z \leq 1\}.$$

Rozwiązanie:

Ponieważ dana w zadaniu paraboloida obrotowa powstaje przez obrót wokół osi OZ łuku paraboli o równaniu $z = x^2$, $0 \leq x \leq 1$, umieszczonego w płaszczyźnie XZ , przyjmiemy w podanym wzorze $f(x) = x^2$, $a = 0$, $b = 1$.

Biorąc pod uwagę, że $f'(x) = 2x$ oraz wykonując po drodze podstawienie $t = 1 + 4x^2$, czyli formalnie $dt = 8x dx$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} 2\pi \cdot \int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx &= 2\pi \cdot \int_0^1 x \cdot \sqrt{1 + 4x^2} dx = \frac{\pi}{4} \cdot \int_1^5 \sqrt{t} dt = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot t^{3/2} \Big|_{t=1}^5 = \frac{\pi}{6} \cdot t^{3/2} \Big|_{t=1}^5 = \\ &= \frac{\pi}{6} \cdot 5^{3/2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \cdot (5\sqrt{5} - 1). \end{aligned}$$

Odpowiedź: Pole danej w zadaniu powierzchni obrotowej jest równe $\frac{\pi}{6} \cdot (5\sqrt{5} - 1)$.

Zadanie 24. (10 punktów)

Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt[3]{n^2} \right).$$

Rozwiązanie:

Przekształcimy dany w zadaniu szereg korzystając ze wzoru na różnicę sześcianów, a następnie skorzystamy z kryterium porównawczego:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt[3]{n^2} \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+1)^{2/3} + n^{2/3} \cdot \sqrt[3]{n^2+1} + n^{4/3}} \leqslant \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+0)^{2/3} + n^{2/3} \cdot \sqrt[3]{n^2+0} + n^{4/3}} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}} < +\infty, \end{aligned}$$

bo $4/3 > 1$.

Odpowiedź: Dany w treści zadania szereg jest zbieżny.

Zadanie 25. (10 punktów)

Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^4} \cdot x^{n^4}}{(n!)^{n^3}}. \quad (2)$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy n -ty wyraz szeregu (2) traktowanego jako szereg liczbowy z parametrem x przez a_n i zastosujmy do niego kryterium Cauchy'ego. Otrzymujemy

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left| \frac{n^{n^4} \cdot x^{n^4}}{(n!)^{n^3}} \right|} = \frac{n^{n^3} \cdot |x|^{n^3}}{(n!)^{n^2}} = b_n.$$

W celu obliczenia granicy ciągu (b_n) stosujemy kryterium Cauchy'ego do tego ciągu. Otrzymujemy

$$\sqrt[n]{b_n} = \sqrt[n]{\frac{n^{n^3} \cdot |x|^{n^3}}{(n!)^{n^2}}} = \frac{n^{n^2} \cdot |x|^{n^2}}{(n!)^n} = c_n.$$

W celu obliczenia granicy ciągu (c_n) stosujemy kryterium Cauchy'ego do tego ciągu. Otrzymujemy

$$\sqrt[n]{c_n} = \sqrt[n]{\frac{n^{n^2} \cdot |x|^{n^2}}{(n!)^n}} = \frac{n^n \cdot |x|^n}{n!} = d_n.$$

W celu obliczenia granicy ciągu (d_n) w przypadku $x \neq 0$ stosujemy kryterium d'Alemberta do tego ciągu. Otrzymujemy

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{(n+1)^{n+1} \cdot |x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n \cdot |x|^n} = |x| \cdot \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \rightarrow e \cdot |x|$$

przy $n \rightarrow \infty$.

Tak więc zastosowanie kryterium d'Alemberta prowadzi do granicy ilorazów kolejnych wyrazów ciągu (d_n) równej $e \cdot |x|$.

Jeżeli $e \cdot |x| < 1$, czyli $|x| < 1/e$, to na mocy kryterium d'Alemberta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0 < 1,$$

skąd na mocy kryterium Cauchy'ego zastosowanego do ciągu (c_n) mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0 < 1,$$

skąd na mocy kryterium Cauchy'ego zastosowanego do ciągu (b_n) dostajemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 < 1,$$

skąd na mocy kryterium Cauchy'ego zastosowanego do szeregu (2) wnioskujemy, że szereg ten jest zbieżny.

Jeżeli zaś $e \cdot |x| > 1$, czyli $|x| > 1/e$, to na mocy kryterium d'Alemberta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = +\infty > 1,$$

skąd na mocy kryterium Cauchy'ego zastosowanego do ciągu (c_n) mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = +\infty > 1,$$

skąd na mocy kryterium Cauchy'ego zastosowanego do ciągu (b_n) dostajemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty > 1,$$

skąd na mocy kryterium Cauchy'ego zastosowanego do szeregu (2) wnioskujemy, że szereg ten jest rozbieżny.

Zatem promień zbieżności szeregu potęgowego (2) jest równy $1/e$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg potęgowy ma promień zbieżności $1/e$.

Zadanie 26. (10 punktów)

Udowodnić nierówność $\int_0^{4\pi} \cos^{10} x \, dx < \pi$.

Rozwiązanie:

Użyjemy liczb zespolonych do wyprowadzenia odpowiedniej tożsamości trygonometrycznej.

Przyjmijmy

$$z = \cos x + i \sin x,$$

co daje

$$z^n = \cos nx + i \sin nx, \quad z^{-n} = \cos nx - i \sin nx, \quad \cos nx = \frac{z^n + z^{-n}}{2}.$$

Przy tych oznaczeniach otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \cos^{10} x &= \left(\frac{z + z^{-1}}{2} \right)^{10} = \\ &= \frac{z^{10} + 10z^8 + 45z^6 + 120z^4 + 210z^2 + 252 + 210z^{-2} + 120z^{-4} + 45z^{-6} + 10z^{-8} + z^{-10}}{1024} = \\ &= \frac{\cos 10x}{512} + \frac{5 \cos 8x}{256} + \frac{45 \cos 6x}{512} + \frac{15 \cos 4x}{64} + \frac{105 \cos 2x}{256} + \frac{63}{256}. \end{aligned}$$

Teraz możemy obliczyć daną w zadaniu całkę (zauważenie, że całka z cosinusa po pełnym okresie jest zerem, pozwala wydatnie uprościć obliczenia):

$$\int_0^{4\pi} \cos^{10} x \, dx = \int_0^{4\pi} \left(\frac{\cos 10x}{512} + \frac{5 \cos 8x}{256} + \frac{45 \cos 6x}{512} + \frac{15 \cos 4x}{64} + \frac{105 \cos 2x}{256} + \frac{63}{256} \right) dx = \frac{63\pi}{64} < \pi.$$

Zadanie 31. (10 punktów)

Obliczyć całkę oznaczoną $\int_0^{30} g(x) dx$, gdzie funkcja g jest funkcją odwrotną do funkcji $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ określonej wzorem $f(x) = 30 + x - x^5$.

Rozwiązanie:

Odnajdujemy najpierw, że $f'(x) = 1 - 5x^4 < 0$ dla $x \geq 1$, a zatem funkcja f jest malejąca. Ponadto $f(1) = 30$ i $f(2) = 0$, skąd $g(30) = 1$ i $g(0) = 2$. Podstawiając w danej całce $x = 30 + y - y^5 = f(y)$, czyli formalnie $dx = (1 - 5y^4) dy$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_0^{30} g(x) dx &= \int_2^1 g(f(y)) \cdot (1 - 5y^4) dy = \int_2^1 y \cdot (1 - 5y^4) dy = \int_2^1 y - 5y^5 dy = \int_1^2 5y^5 - y dy = \\ &= \left. \frac{5y^6}{6} - \frac{y^2}{2} \right|_{y=1}^2 = \frac{5 \cdot 64}{6} - \frac{4}{2} - \frac{5}{6} + \frac{1}{2} = \frac{320 - 12 - 5 + 3}{6} = \frac{306}{6} = 51. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Dana całka ma wartość 51.

Zadanie 32. (10 punktów)

Rozstrzygnąć, czy całka

$$\int_{-1}^1 \sqrt{25+x^3} dx$$

ma wartość mniejszą czy większą od 10.

*Rozwiązanie:*Dzieląc przedział całkowania na dwa przedziały i wykonując podstawienie $x = -t$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sqrt{25+x^3} dx &= \int_{-1}^0 \sqrt{25+x^3} dx + \int_0^1 \sqrt{25+x^3} dx = - \int_1^0 \sqrt{25-t^3} dt + \int_0^1 \sqrt{25+x^3} dx = \\ &= \int_0^1 \sqrt{25-t^3} dt + \int_0^1 \sqrt{25+x^3} dx = \int_0^1 \sqrt{25-x^3} dx + \int_0^1 \sqrt{25+x^3} dx = \\ &= \int_0^1 \sqrt{25-x^3} + \sqrt{25+x^3} dx < \int_0^1 10 dx = 10. \end{aligned}$$

Powyżej skorzystaliśmy z nierówności

$$\sqrt{25-y} + \sqrt{25+y} < 10$$

prawdziwej dla każdej liczby $y \in (0, 1]$, którą to nierówność dowodzimy poprzez następujące przejścia równoważne:

$$25 - y + 2 \cdot \sqrt{25-y} \cdot \sqrt{25+y} + 25 + y < 100,$$

$$\sqrt{25-y} \cdot \sqrt{25+y} < 25,$$

$$(25-y) \cdot (25+y) < 25^2,$$

$$25^2 - y^2 < 25^2.$$

Odpowiedź: Wartość podanej całki jest mniejsza od 10.**Uwaga:** Wartość podanej całki jest w przybliżeniu równa 9,9997.

Zadanie 33. (10 punktów)

Pamiętasz zespolony szereg potęgowy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n \cdot 3^n}}{n}$, który w punktach postaci $z = e^{k\pi i/3^m}$, gdzie $m \in \mathbb{N}$ oraz $k \in \mathbb{Z}$, jest zbieżny albo rozbieżny w zależności od parzystości k ?

Podstaw za z wybraną przez Ciebie liczbę zespoloną o module 1 nie będącą powyższej postaci, dla której ten szereg jest zbieżny, a następnie oblicz jego sumę.

Przypomnienie: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4},$

Rozwiązanie:

Dla $z = i$, po uwzględnieniu $i^a = i^b$ dla $a \equiv b \pmod{4}$, dany szereg przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{n \cdot 3^n}}{n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{2n \cdot 3^{2n}}}{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{(2n+1) \cdot 3^{2n+1}}}{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{(2n+1) \cdot 3}}{2n+1} = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{6n+3}}{2n+1} = -\frac{\ln 2}{2} - i \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = -\frac{\ln 2}{2} - \frac{\pi i}{4}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Dla $z = i$ suma danego szeregu jest równa $-\frac{\ln 2}{2} - \frac{\pi i}{4}$.

Zadanie 34. (10 punktów)

Wiadomo, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6} \quad \text{dla} \quad 0 \leq x \leq 2\pi.$$

Obliczyć wartość sumy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \frac{1}{11^3} + \dots$$

*Rozwiązanie:*Rozważmy funkcję f będącą sumą szeregu funkcyjnego

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad (3)$$

gdzie $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n^3}$, a więc $f'_n(x) = \frac{\cos nx}{n^2}$. Ponieważ szeregi liczbowe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f'_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

są zbieżne, szeregi funkcyjne $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$ są zbieżne jednostajnie i w konsekwencji szereg (3) można różniczkować wyraz za wyrazem. Zatem dla $x \in [0, 2\pi]$ mamy

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6},$$

skąd

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \left(\frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6} \right) dx = \frac{x^3}{12} - \frac{\pi x^2}{4} + \frac{\pi^2 x}{6} + C.$$

Zauważmy, że ze wzoru (3) wynika $f(0) = 0$, skąd $C = 0$ i w konsekwencji

$$f(x) = \frac{x^3}{12} - \frac{\pi x^2}{4} + \frac{\pi^2 x}{6} \quad \text{dla} \quad 0 \leq x \leq 2\pi. \quad (4)$$

Przyjmując $x = \pi/2$ we wzorze (4) otrzymujemy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{96} - \frac{\pi^3}{16} + \frac{\pi^3}{12} = \pi^3 \cdot \frac{1-6+8}{96} = \pi^3 \cdot \frac{3}{96} = \frac{\pi^3}{32}.$$

Odpowiedź: Suma szeregu liczbowego podanego w treści zadania jest równa $\pi^3/32$.

Zadanie 35. (10 punktów)

Wiedząc, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$, obliczyć sumę permutacji szeregu anharmonicznego, w której na przemian występują trzy wyrazy dodatnie i jeden ujemny:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{4} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{6} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} + \frac{1}{23} - \frac{1}{8} + \frac{1}{25} + \frac{1}{27} + \frac{1}{29} - \frac{1}{10} + \dots$$

Rozwiązanie:

Ponieważ wyrazy szeregu dążą do zera, jego zbieżność (i sumę) można zbadać rozważając tylko co czwartą sumę częściową. Otrzymujemy

$$S_{4n} = \sum_{i=1}^{3n} \frac{1}{2i-1} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2i} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^{i+1}}{i} + \sum_{i=n+1}^{3n} \frac{1}{2i-1}.$$

Skoro wiemy, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$, definicja zbieżności szeregu daje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^{i+1}}{i} = \ln 2.$$

Ponadto oznaczając $f(x) = 1/(2x)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n+1}^{3n} \frac{1}{2i-1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=n+1}^{3n} \frac{1}{(2i-1)/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=n+1}^{3n} f\left(\frac{i-1/2}{n}\right) = \int_1^3 f(x) dx = \\ &= \int_1^3 \frac{dx}{2x} = \frac{\ln |x|}{2} \Big|_{x=1}^3 = \frac{\ln 3}{2} - \frac{\ln 1}{2} = \frac{\ln 3}{2}. \end{aligned}$$

Ostatecznie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{4n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^{i+1}}{i} + \sum_{i=n+1}^{3n} \frac{1}{2i-1} \right) = \ln 2 + \frac{\ln 3}{2}.$$

Odpowiedź: Suma danego szeregu jest równa $\ln 2 + \frac{\ln 3}{2}$.

Zadanie 36. (10 punktów)

Skonstruować funkcję różniczkowalną $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniającą warunki

$$f(8) = 8 \quad \text{oraz} \quad f(x) = (f'(x))^3 \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

Rozwiązanie:

Zajmijmy się najpierw warunkiem

$$f(x) = (f'(x))^3 \tag{5}$$

i spróbujmy znaleźć funkcje, być może określone na przedziale mniejszym niż $\mathbb{R}$, które go spełniają.

Przed wszystkim zauważmy, że funkcja stała równa 0 spełnia warunek (5).

Jeżeli funkcja f przyjmuje wartości dodatnie, to możemy przepisać warunek (5) w postaci

$$\frac{f'(x)}{\sqrt[3]{f(x)}} = 1. \tag{6}$$

Całkując stronami równanie (6) otrzymujemy kolejno:

$$\begin{aligned} \int \frac{f'(x) dx}{\sqrt[3]{f(x)}} &= \int dx, \\ \frac{3}{2} \cdot (f(x))^{2/3} &= x + C, \\ f(x) &= \left(\frac{2}{3} \cdot (x + C) \right)^{3/2}. \end{aligned} \tag{7}$$

Bezpośrednio sprawdzamy, że funkcja f określona wzorem (7) dla $x \geq -C$ spełnia warunek (5) dla $x > -C$, a ponadto $f(-C) = f'(-C^+) = 0$.

Rozszerzmy funkcję f na całą prostą wartościami równymi 0, czyli przyjmijmy

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in (-\infty, -C) \\ \left(\frac{2}{3} \cdot (x + C) \right)^{3/2} & \text{dla } x \in [-C, +\infty) \end{cases} \tag{8}$$

Zauważmy, że wartość tak określonej funkcji f oraz jej pochodna prawostronne w punkcie $-C$ są równe 0, skąd wynika, że wzór (8) określa funkcję różniczkowalną na całej prostej spełniającą równanie (5).

W celu doboru odpowiedniej stałej C rozwiązujemy równanie

$$\left(\frac{2}{3} \cdot (8 + C) \right)^{3/2} = 8,$$

które prowadzi kolejno do

$$\frac{2}{3} \cdot (8 + C) = 4, \quad 8 + C = 6, \quad C = -2.$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in (-\infty, 2) \\ \left(\frac{2}{3} \cdot (x - 2) \right)^{3/2} & \text{dla } x \in [2, +\infty) \end{cases}$$