

Egzamin, 21.06.2017, godz. 9:00-13:20**Zadanie 11. (10 punktów)**Obliczyć całkę nieoznaczoną $\int x^2 \cdot \sqrt[3]{x+1} dx$.**Zadanie 12. (10 punktów)**

Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_1^e x^2 \cdot \ln x dx.$$

Zadanie 13. (10 punktów)Obliczyć wartość całki niewłaściwej $\int_7^\infty \frac{dx}{x^3+x}$ lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.**Zadanie 14. (10 punktów)**

Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n \cdot \binom{3n}{n} \cdot x^{3n}}{n! \cdot 2^n}.$$

Zadanie 15. (10 punktów)Udowodnić zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} ((-1)^n \cdot (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}))$.**Przypomnienie:** Starannie sformułuj kryteria, z których korzystasz.**Zadanie 16. (10 punktów)**Niech $a_n = \frac{n+3}{n+1}$ dla $n \in \mathbb{N}$.Udowodnić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (2^{2^{a_n}} - 2^{2^{a_{n+1}}})$ jest zbieżny i wyznaczyć jego sumę.

Zadanie 21. (10 punktów)

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k^2}.$$

Zadanie 22. (10 punktów)Udowodnić zbieżność całki niewłaściwej $\int_0^{\infty} \frac{x^{\pi} dx}{\sqrt{x^9+x^8}}$.**Zadanie 23. (10 punktów)**Wiadomo, że dla funkcji różniczkowalnej $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $0 \leq a < b$, pole powierzchni powstałej przez obrót krzywej

$$\{(x, f(x)) : x \in [a, b]\}$$

wokół osi OY jest równe

$$2\pi \cdot \int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Wyznaczyć pole powierzchni

$$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = z \leq 1\}.$$

Zadanie 24. (10 punktów)

Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt[3]{n^2} \right).$$

Zadanie 25. (10 punktów)

Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^4} \cdot x^{n^4}}{(n!)^{n^3}}.$$

Zadanie 26. (10 punktów)Udowodnić nierówność $\int_0^{4\pi} \cos^{10} x dx < \pi$.

Zadanie 31. (10 punktów)

Obliczyć całkę oznaczoną $\int_0^{30} g(x) dx$, gdzie funkcja g jest funkcją odwrotną do funkcji $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ określonej wzorem $f(x) = 30 + x - x^5$.

Zadanie 32. (10 punktów)

Rozstrzygnąć, czy całka

$$\int_{-1}^1 \sqrt{25 + x^3} dx$$

ma wartość mniejszą czy większą od 10.

Zadanie 33. (10 punktów)

Pamiętasz zespolony szereg potęgowy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n \cdot 3^n}}{n}$, który w punktach postaci $z = e^{k\pi i/3^m}$, gdzie $m \in \mathbb{N}$ oraz $k \in \mathbb{Z}$, jest zbieżny albo rozbieżny w zależności od parzystości k ?

Podstaw za z wybraną przez Ciebie liczbę zespoloną o module 1 nie będącą powyższej postaci, dla której ten szereg jest zbieżny, a następnie oblicz jego sumę.

Przypomnienie: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$,

Zadanie 34. (10 punktów)

Wiadomo, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6} \quad \text{dla} \quad 0 \leq x \leq 2\pi.$$

Obliczyć wartość sumy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \frac{1}{11^3} + \dots$$

Zadanie 35. (10 punktów)

Wiedząc, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$, obliczyć sumę permutacji szeregu anharmonicznego, w której na przemian występują trzy wyrazy dodatnie i jeden ujemny:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{4} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{6} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} + \frac{1}{23} - \frac{1}{8} + \frac{1}{25} + \frac{1}{27} + \frac{1}{29} - \frac{1}{10} + \dots$$

Zadanie 36. (10 punktów)

Skonstruować funkcję różniczkowalną $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniającą warunki

$$f(8) = 8 \quad \text{oraz} \quad f(x) = (f'(x))^3 \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}.$$