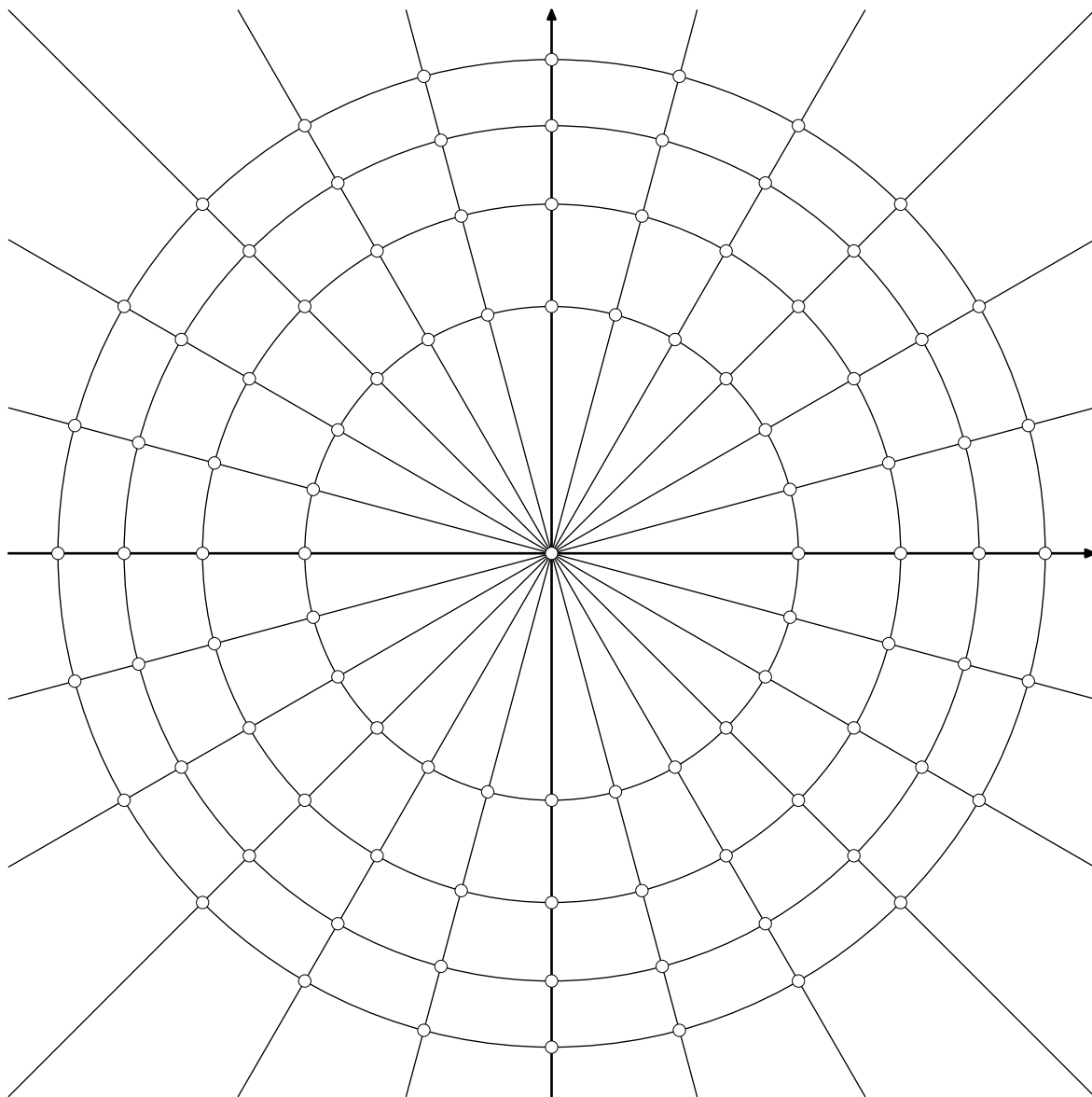


Egzamin, **9.09.2017**, godz. 11:00-14:00Zadanie **11.** (10 punktów)

Wyznaczyć wszystkie rozwiązania równania $z^9 = 27z^3$ w liczbach zespolonych. Zapisać wszystkie rozwiązania w postaci kartezjańskiej (bez używania funkcji trygonometrycznych) oraz zaznaczyć wszystkie rozwiązania na płaszczyźnie zespolonej wykorzystując zamieszczony niżej rysunek, na którym narysowano okręgi o środku w zerze i promieniach $\sqrt{n}$ dla $n = 1, 2, 3, 4$ oraz proste przechodzące przez punkt 0, co 15° .



Rozwiązanie:

Przepisujemy dane równanie w postaci

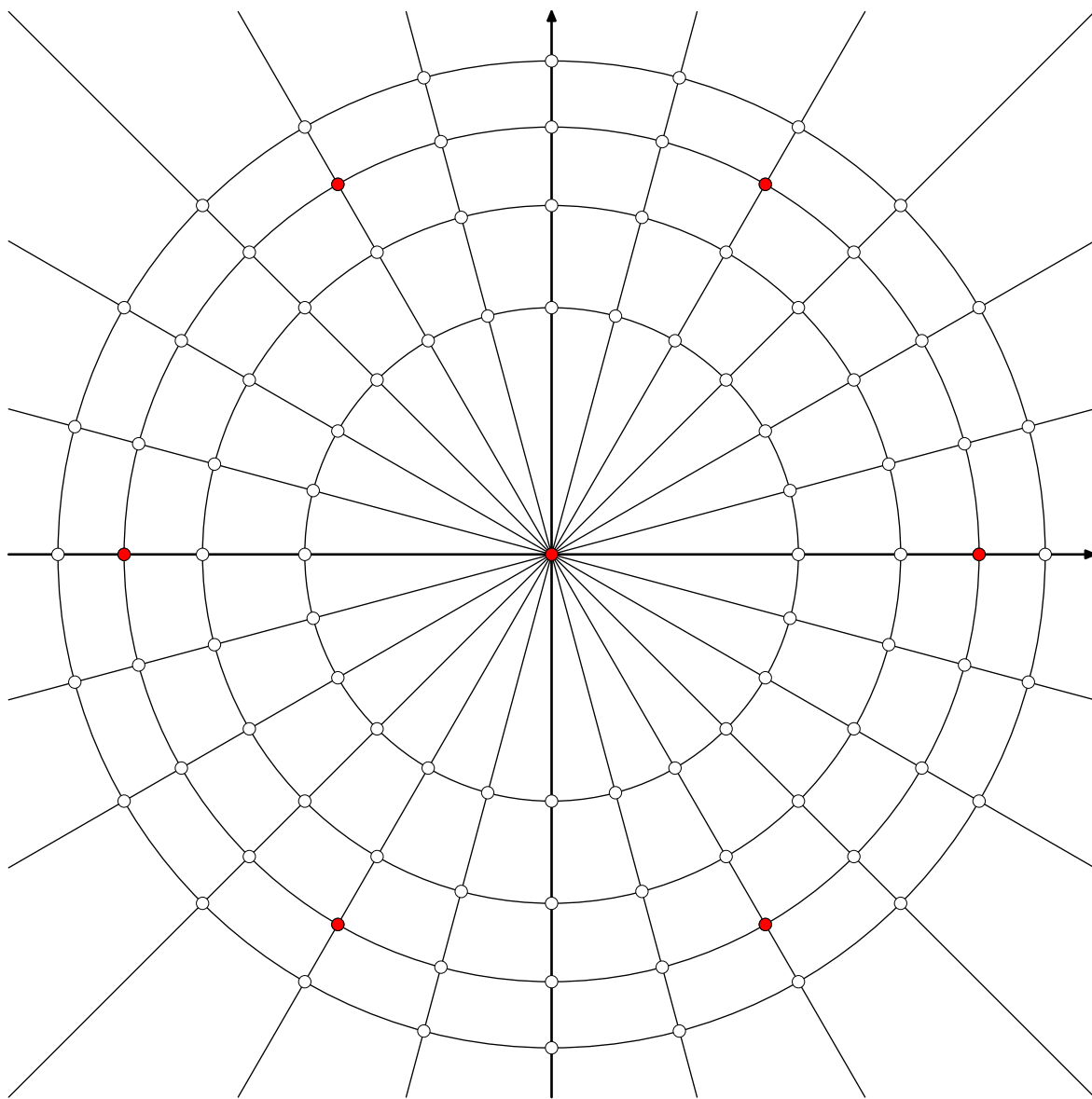
$$z^3 \cdot (z^6 - 27) = 0.$$

Powyższe równanie jest spełnione przez $z = 0$ oraz przez takie liczby zespolone z , że $z^6 = 27$.

Zauważmy, że jednym z rozwiązań równania $z^6 = 27$ jest $z = \sqrt{3}$, a pozostałe pięć rozwiązań tego równania leży na okręgu o promieniu $\sqrt{3}$ co 60° .

Inaczej: liczba 27 ma moduł 27 i argument 0, a zatem jej pierwiastki szóstego stopnia mają moduł $\sqrt{3}$ i argumenty $2k\pi/6$ dla $k=0,1,2,3,4,5$, czyli odpowiednio $0, \pi/3, 2\pi/3, \pi, 4\pi/3, 5\pi/3$.

Odpowiedź: Dane równanie ma 7 rozwiązań: $0, \pm\sqrt{3}$ oraz $\pm_1 \frac{\sqrt{3}}{2} \pm_2 \frac{3i}{2}$.



Zadanie 12. (20 punktów)

W każdym z zadań **12.1-12.20** podaj sumę szeregu (może być liczbą rzeczywistą albo jednym z symboli $+\infty$ i $-\infty$).

Za każdą poprawną odpowiedź otrzymasz **1 punkt**.

Niech $a_n = 2^{3-n}$. Wówczas:

$$\mathbf{12.1.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \mathbf{8}$$

$$\mathbf{12.2.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^{a_n} = +\infty$$

$$\mathbf{12.3.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1}) = \mathbf{12}$$

$$\mathbf{12.4.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+2}) = \mathbf{10}$$

$$\mathbf{12.5.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+3}) = \mathbf{9}$$

$$\mathbf{12.6.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} + a_{n+2}) = \mathbf{6}$$

$$\mathbf{12.7.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} + a_{n+3}) = \mathbf{5}$$

$$\mathbf{12.8.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+2} + a_{n+3}) = \mathbf{3}$$

$$\mathbf{12.9.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - a_{n+1}^2) = \mathbf{16}$$

$$\mathbf{12.10.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - a_{n+2}^2) = \mathbf{20}$$

$$\mathbf{12.11.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - a_{n+3}^2) = \mathbf{21}$$

$$\mathbf{12.12.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1}^2 - a_{n+2}^2) = \mathbf{4}$$

$$\mathbf{12.13.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1}^2 - a_{n+3}^2) = \mathbf{5}$$

$$\mathbf{12.14.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+2}^2 - a_{n+3}^2) = \mathbf{1}$$

$$\mathbf{12.15.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (2^{a_n} - 2^{a_{n+1}}) = \mathbf{15}$$

$$\mathbf{12.16.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (2^{a_n} - 2^{a_{n+2}}) = \mathbf{18}$$

$$\mathbf{12.17.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (2^{a_n} - 2^{a_{n+3}}) = \mathbf{19}$$

$$\mathbf{12.18.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (2^{a_{n+1}} - 2^{a_{n+2}}) = \mathbf{3}$$

$$\mathbf{12.19.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (2^{a_{n+1}} - 2^{a_{n+3}}) = \mathbf{4}$$

$$\mathbf{12.20.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (2^{a_{n+2}} - 2^{a_{n+3}}) = \mathbf{1}$$

Zadanie 13. (10 punktów)

Obliczyć wartość całki niewłaściwej $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^4+x^2}$ lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^4+x^2} &= \frac{1}{(x^2+1) \cdot x^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x} + \frac{D}{x^2}, \\ 1 &= (Ax+B) \cdot x^2 + C \cdot x \cdot (x^2+1) + D \cdot (x^2+1), \\ 1 &= Ax^3 + Bx^2 + Cx^3 + Cx + Dx^2 + D,\end{aligned}$$

$$\begin{cases} 0 &= A+C \\ 0 &= B+D \\ 0 &= C \\ 1 &= D \end{cases}$$

Stąd otrzymujemy $A=0$ i $B=-1$.

Wobec tego

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^4+x^2} &= \int_1^{\infty} -\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{x^2} dx = -\arctg x - \frac{1}{x} \Big|_{x=1}^{\infty} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} (-\arctg x) + \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x}\right) + \arctg 1 + \frac{1}{1} = -\frac{\pi}{2} + 0 + \frac{\pi}{4} + 1 = 1 - \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka jest zbieżna i ma wartość $1 - \pi/4$.

Zadanie 14. (10 punktów)

Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n \cdot \binom{2n}{n}^3 \cdot x^{5n}}{n! \cdot 2^n}. \quad (1)$$

Rozwiązanie:

Stosujemy kryterium d'Alemberta do szeregu (1) traktowanego jako szereg liczbowy z parametrem $x \neq 0$.

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \left| \frac{(n+1)^{n+1} \cdot \binom{2n+2}{n+1}^3 \cdot x^{5n+5}}{(n+1)! \cdot 2^{n+1}} \cdot \frac{n! \cdot 2^n}{n^n \cdot \binom{2n}{n}^3 \cdot x^{5n}} \right| &= \left| \frac{(n+1) \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot x^5}{(n+1) \cdot 2} \cdot \frac{\binom{2n+2}{n+1}^3}{\binom{2n}{n}^3} \right| = \\ &= \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot |x|^5}{2} \cdot \frac{(2n+1)^3 \cdot (2n+2)^3}{(n+1)^3 \cdot (n+1)^3} \rightarrow 32e \cdot |x|^5 \end{aligned}$$

przy $n \rightarrow \infty$.

Tak więc zastosowanie kryterium d'Alemberta prowadzi do granicy ilorazów kolejnych wyrazów szeregu (1) równej $32e \cdot |x|^5$.

Jeżeli $32e \cdot |x|^5 < 1$, czyli $|x| < \frac{1}{2 \cdot \sqrt[5]{e}}$, to szereg (1) jest zbieżny.

Jeżeli zaś $32e \cdot |x|^5 > 1$, czyli $|x| > \frac{1}{2 \cdot \sqrt[5]{e}}$, to szereg (1) jest rozbieżny.

Stąd wniosek, że promień zbieżności szeregu potęgowego (1) jest równy $\frac{1}{2 \cdot \sqrt[5]{e}}$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg potęgowy ma promień zbieżności $\frac{1}{2 \cdot \sqrt[5]{e}}$.

Zadanie 15. (10 punktów)

Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} dx.$$

*Rozwiązanie:*Wykonując podstawienie $x = t^6$ i formalnie $dx = 6t^5 dt$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} dx &= \int \frac{t^3}{1 + t^2} \cdot 6t^5 dt = 6 \cdot \int \frac{t^8 dt}{t^2 + 1} = 6 \cdot \int \frac{(t^8 - 1) + 1}{t^2 + 1} dt = 6 \cdot \int t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{t^2 + 1} dt = \\ &= \frac{6t^7}{7} - \frac{6t^5}{5} + 2t^3 - 6t + 6 \cdot \arctg t + C = \frac{6x^{7/6}}{7} - \frac{6x^{5/6}}{5} + 2\sqrt{x} - 6\sqrt[6]{x} + 6 \cdot \arctg \sqrt[6]{x} + C. \end{aligned}$$

Zadanie 16. (10 punktów)

Udowodnić zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{(n+1) \cdot (n+2)}$.

Rozwiązanie:

Aby udowodnić zbieżność szeregu danego w treści zadania, skorzystamy z kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

W tym celu musimy zweryfikować prawdziwość trzech założeń tego kryterium.

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne - oczywiste.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.

Sprawdzamy to następująco:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(n+1) \cdot (n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{n}\right)} = \frac{0}{1 \cdot 1} = 0.$$

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.

Ten warunek jest najmniej oczywisty. Aby go udowodnić, powinniśmy wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\frac{n}{(n+1) \cdot (n+2)} \geq \frac{n+1}{(n+2) \cdot (n+3)},$$

co kolejno jest równoważne nierównościom

$$\begin{aligned} \frac{n}{n+1} &\geq \frac{n+1}{n+3}, \\ n \cdot (n+3) &\geq (n+1) \cdot (n+1), \\ n^2 + 3n &\geq n^2 + 2n + 1, \\ n &\geq 1, \end{aligned}$$

skąd wynika, że dowodzona nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n .

W konsekwencji szereg dany w treści zadania jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

Zadanie 17. (10 punktów)

Wiedząc, że

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int x^2 \arcsin x \, dx.$$

Rozwiązanie:

Wykonujemy całkowanie przez części całkując czynnik x^2 i różniczkując $\arcsin x$. Otrzymujemy:

$$\int x^2 \cdot \arcsin x \, dx = \frac{x^3}{3} \cdot \arcsin x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx.$$

W ostatniej całce wykonujemy podstawienie $t = 1 - x^2$, w którym stosujemy formalny wzór $dt = -2x \, dx$. Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx &= -\frac{1}{6} \cdot \int \frac{x^2 \cdot (-2x) \, dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{6} \cdot \int \frac{(1-t) \, dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{6} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{t}} - \sqrt{t} \, dt = \\ &= -\frac{\sqrt{t}}{3} + \frac{t^{3/2}}{9} + C_1 = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{3} + \frac{(1-x^2)^{3/2}}{9} + C_1. \end{aligned}$$

W konsekwencji

$$\int \arcsin x \, dx = \frac{x^3 \cdot \arcsin x}{3} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{3} - \frac{(1-x^2)^{3/2}}{9} + C.$$

Zadanie 18. (10 punktów)

Skonstruować funkcję różniczkowalną $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniającą warunki

$$f(0) = 0 \quad \text{oraz} \quad f'(x) = \sqrt{x^4 - 2x^2 + 1} \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

Rozwiązanie:

Przepisujemy wzór na pochodną funkcji f :

$$f'(x) = \sqrt{x^4 - 2x^2 + 1} = \sqrt{(x^2 - 1)^2} = |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{dla } x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \\ -x^2 + 1 & \text{dla } x \in (-1, 1) \end{cases}$$

Dla $x \in (-\infty, -1]$ zachodzi $f'(x) = x^2 - 1$, mamy więc¹

$$f(x) = \int x^2 - 1 \, dx = \frac{x^3}{3} - x + C_1.$$

Dla $x \in [-1, 1]$ zachodzi $f'(x) = -x^2 + 1$, mamy więc

$$f(x) = \int -x^2 + 1 \, dx = -\frac{x^3}{3} + x + C_2.$$

Dla $x \in [1, +\infty)$ zachodzi $f'(x) = x^2 - 1$, mamy więc

$$f(x) = \int x^2 - 1 \, dx = \frac{x^3}{3} - x + C_3.$$

Aby zagwarantować warunek $f(0) = 0$, należy przyjąć $C_2 = 0$.

Aby zagwarantować zgodność określenia $f(-1)$, musi być

$$\frac{(-1)^3}{3} - (-1) + C_1 = -\frac{(-1)^3}{3} + (-1) + C_2,$$

czyli

$$\frac{2}{3} + C_1 = -\frac{2}{3},$$

skąd $C_1 = -4/3$.

Aby zagwarantować zgodność określenia $f(1)$, musi być

$$\frac{1^3}{3} - 1 + C_3 = -\frac{1^3}{3} + 1 + C_2,$$

czyli

$$-\frac{2}{3} + C_3 = \frac{2}{3},$$

skąd $C_3 = 4/3$.

¹Dokładniej: Funkcja $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $g(x) = \frac{x^3}{3} - x + C_1$ ma na całej prostej pochodną określoną wzorem $g'(x) = x^2 - 1$, skąd wynika, że jeżeli $f(x) = g(x) = \frac{x^3}{3} - x + C_1$ dla $x \in (-\infty, -1]$, to $f'(x) = g'(x) = x^2 - 1$ dla $x \in (-\infty, -1)$ oraz $f'(x^-) = g'(x) = x^2 - 1$ dla $x = -1$.

Co więcej, wzór $f(x) = \frac{x^3}{3} - x + C_1$ dla $x \in (-\infty, -1]$ definiuje wszystkie funkcje różniczkowalne $f: (-\infty, -1] \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające warunki $f'(x) = x^2 - 1$ dla $x \in (-\infty, -1)$ oraz $f'(x^-) = x^2 - 1$ dla $x = -1$.

Ostatecznie otrzymujemy

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} - x - \frac{4}{3} & \text{dla } x \in (-\infty, -1] \\ -\frac{x^3}{3} + x & \text{dla } x \in (-1, 1) \\ \frac{x^3}{3} - x + \frac{4}{3} & \text{dla } x \in [1, +\infty) \end{cases}$$