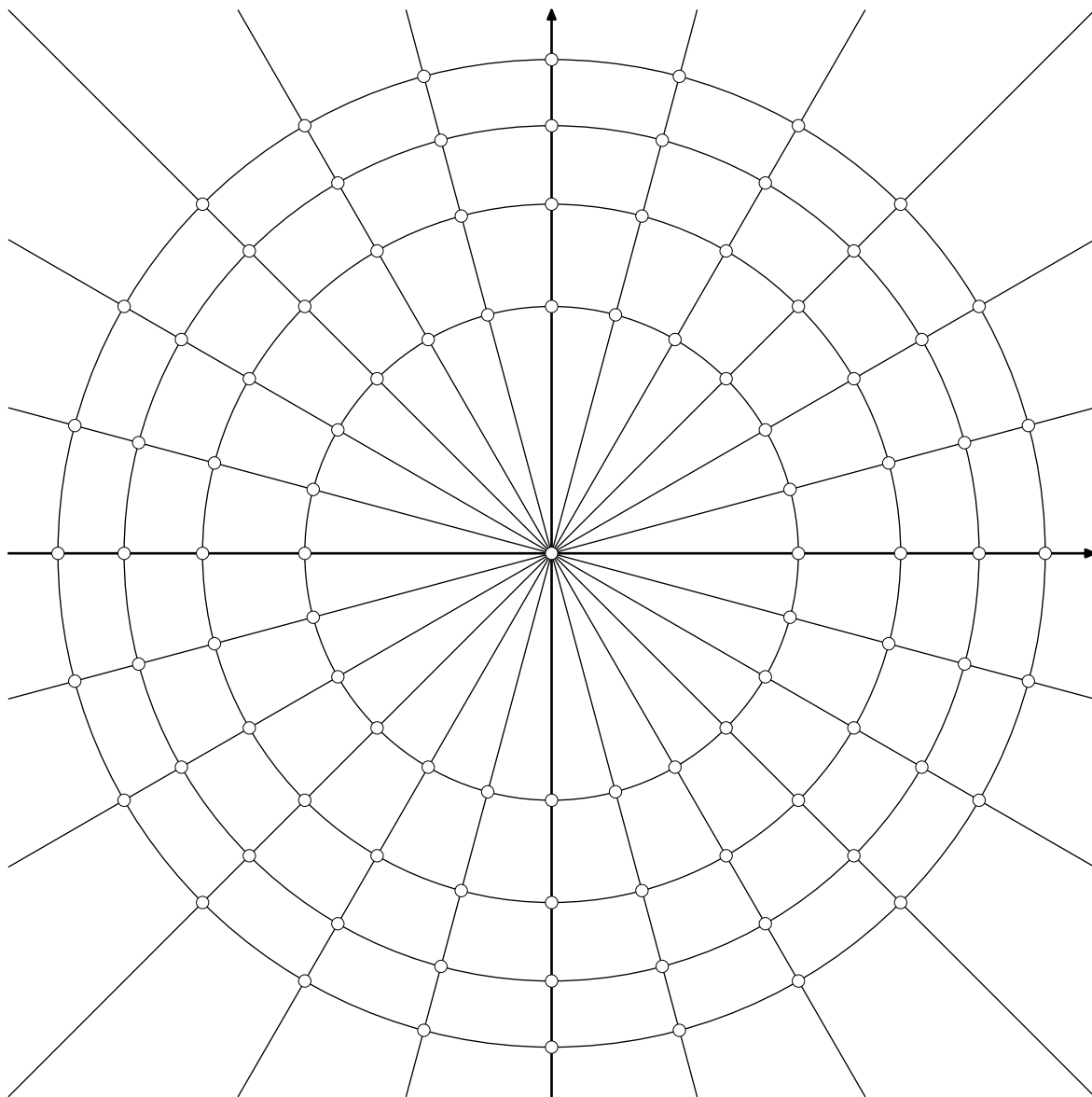


Egzamin, **9.09.2017**, godz. 11:00-14:00Zadanie **11.** (10 punktów)

Wyznaczyć wszystkie rozwiązania równania  $z^9 = 27z^3$  w liczbach zespolonych. Zapisać wszystkie rozwiązania w postaci kartezjańskiej (bez używania funkcji trygonometrycznych) oraz zaznaczyć wszystkie rozwiązania na płaszczyźnie zespolonej wykorzystując zamieszczony niżej rysunek, na którym narysowano okręgi o środku w zerze i promieniach  $\sqrt{n}$  dla  $n = 1, 2, 3, 4$  oraz proste przechodzące przez punkt 0, co  $15^\circ$ .



**Zadanie 12. (20 punktów)**

W każdym z zadań **12.1-12.20** podaj sumę szeregu (może być liczbą rzeczywistą albo jednym z symboli  $+\infty$  i  $-\infty$ ).

Za każdą poprawną odpowiedź otrzymasz **1 punkt**.

Niech  $a_n = 2^{3-n}$ . Wówczas:

---

**12.1.**  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \dots\dots\dots$

**12.2.**  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{a_n} = \dots\dots\dots$ 


---

**12.3.**  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1}) = \dots\dots$

**12.4.**  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+2}) = \dots\dots$ 


---

**12.5.**  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+3}) = \dots\dots$

**12.6.**  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} + a_{n+2}) = \dots\dots$ 


---

**12.7.**  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} + a_{n+3}) = \dots\dots$

**12.8.**  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+2} + a_{n+3}) = \dots\dots$ 


---

**12.9.**  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - a_{n+1}^2) = \dots\dots$

**12.10.**  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - a_{n+2}^2) = \dots\dots$ 


---

**12.11.**  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - a_{n+3}^2) = \dots\dots$

**12.12.**  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1}^2 - a_{n+2}^2) = \dots\dots$ 


---

**12.13.**  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1}^2 - a_{n+3}^2) = \dots\dots$

**12.14.**  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+2}^2 - a_{n+3}^2) = \dots\dots$ 


---

**12.15.**  $\sum_{n=1}^{\infty} (2^{a_n} - 2^{a_{n+1}}) = \dots\dots$

**12.16.**  $\sum_{n=1}^{\infty} (2^{a_n} - 2^{a_{n+2}}) = \dots\dots$ 


---

**12.17.**  $\sum_{n=1}^{\infty} (2^{a_n} - 2^{a_{n+3}}) = \dots\dots$

**12.18.**  $\sum_{n=1}^{\infty} (2^{a_{n+1}} - 2^{a_{n+2}}) = \dots\dots$ 


---

**12.19.**  $\sum_{n=1}^{\infty} (2^{a_{n+1}} - 2^{a_{n+3}}) = \dots\dots$

**12.20.**  $\sum_{n=1}^{\infty} (2^{a_{n+2}} - 2^{a_{n+3}}) = \dots\dots$ 


---

**Zadanie 13. (10 punktów)**

Obliczyć wartość całki niewłaściwej  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^4 + x^2}$  lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

**Zadanie 14. (10 punktów)**

Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n \cdot \binom{2n}{n}^3 \cdot x^{5n}}{n! \cdot 2^n}.$$

**Zadanie 15. (10 punktów)**

Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} dx.$$

**Zadanie 16. (10 punktów)**

Udowodnić zbieżność szeregu  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{(n+1) \cdot (n+2)}$ .

**Zadanie 17. (10 punktów)**

Wiedząc, że

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int x^2 \arcsin x dx.$$

**Zadanie 18. (10 punktów)**

Skonstruować funkcję różniczkowalną  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  spełniającą warunki

$$f(0) = 0 \quad \text{oraz} \quad f'(x) = \sqrt{x^4 - 2x^2 + 1} \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$