

KOŁOKWIUM nr 10, 6.06.2017, godz. 12:15–13:45**Zadanie 20. (10 punktów)**

Znaleźć takie liczby całkowite dodatnie a i b , że

$$\int_a^b \frac{dx}{x^2 - 14x + 50} = \frac{\pi}{2}.$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy funkcję podcałkową

$$\int_a^b \frac{dx}{x^2 - 14x + 50} = \int_a^b \frac{dx}{(x-7)^2 + 1},$$

a następnie wykonujemy podstawienie $t = x - 7$:

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-7)^2 + 1} = \int_{a-7}^{b-7} \frac{dt}{t^2 + 1} = \operatorname{arctg} t \Big|_{t=a-7}^{b-7} = \operatorname{arctg}(b-7) - \operatorname{arctg}(a-7).$$

Zauważmy, że

$$\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}(-1) = \frac{\pi}{2},$$

skąd wynika, że warunki zadania będą spełnione, jeżeli przyjmiemy $b-7=1$ i $a-7=-1$.

Odpowiedź

Warunki zadania są spełnione przez liczby $a=6$ i $b=8$.

Zadanie 21. (20 punktów) W każdym z zadań **21.1-21.20** podaj sumę szeregu (może być liczbą rzeczywistą albo jednym z symboli $+\infty$ i $-\infty$).

Za każdą poprawną odpowiedź otrzymasz **1 punkt**.

Niech $a_n = \frac{6}{n}$. Wówczas:

$$\mathbf{21.1.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$$

$$\mathbf{21.2.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^{a_n} = +\infty$$

$$\mathbf{21.3.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = \mathbf{6}$$

$$\mathbf{21.4.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+2}) = \mathbf{9}$$

$$\mathbf{21.5.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+3}) = \mathbf{11}$$

$$\mathbf{21.6.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_{n+2}) = \mathbf{3}$$

$$\mathbf{21.7.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_{n+3}) = \mathbf{5}$$

$$\mathbf{21.8.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+2} - a_{n+3}) = \mathbf{2}$$

$$\mathbf{21.9.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - a_{n+1}^2) = \mathbf{36}$$

$$\mathbf{21.10.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - a_{n+2}^2) = \mathbf{45}$$

$$\mathbf{21.11.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - a_{n+3}^2) = \mathbf{49}$$

$$\mathbf{21.12.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1}^2 - a_{n+2}^2) = \mathbf{9}$$

$$\mathbf{21.13.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1}^2 - a_{n+3}^2) = \mathbf{13}$$

$$\mathbf{21.14.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+2}^2 - a_{n+3}^2) = \mathbf{4}$$

$$\mathbf{21.15.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (2^{a_n} - 2^{a_{n+1}}) = \mathbf{63}$$

$$\mathbf{21.16.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (2^{a_n} - 2^{a_{n+2}}) = \mathbf{70}$$

$$\mathbf{21.17.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (2^{a_n} - 2^{a_{n+3}}) = \mathbf{73}$$

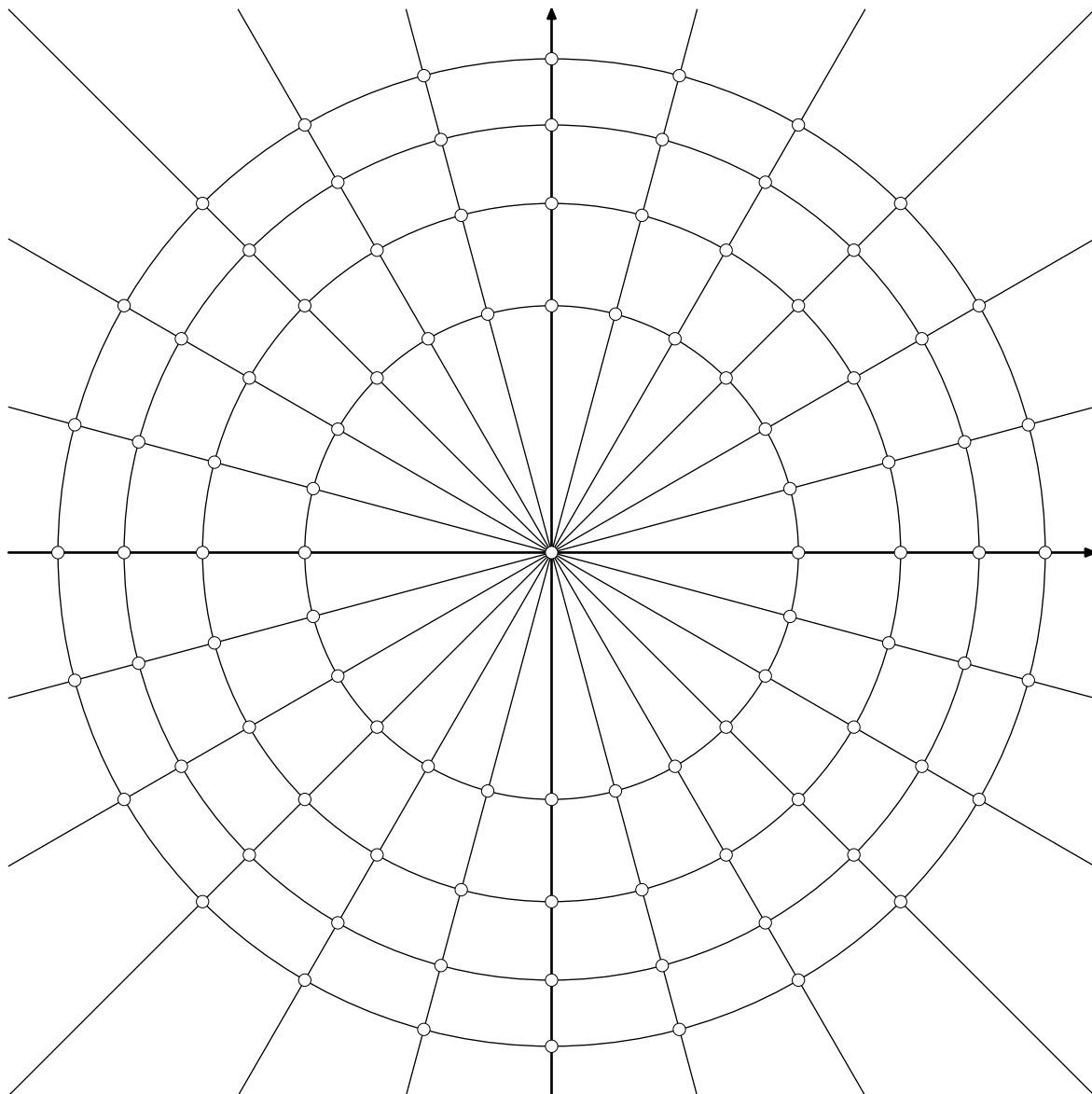
$$\mathbf{21.18.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (2^{a_{n+1}} - 2^{a_{n+2}}) = \mathbf{7}$$

$$\mathbf{21.19.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (2^{a_{n+1}} - 2^{a_{n+3}}) = \mathbf{10}$$

$$\mathbf{21.20.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (2^{a_{n+2}} - 2^{a_{n+3}}) = \mathbf{3}$$

Zadanie 22. (10 punktów)

Wyznaczyć wszystkie rozwiązania równania $z^7 + 4z^3 = 8z^4 + 32$ w liczbach zespolonych. Zapisać wszystkie rozwiązania w postaci kartezjańskiej (bez używania funkcji trygonometrycznych) oraz zaznaczyć wszystkie rozwiązania na płaszczyźnie zespolonej wykorzystując zamieszczony niżej rysunek, na którym narysowano okręgi o środku w zerze i promieniach $\sqrt{n}$ dla $n = 1, 2, 3, 4$ oraz proste przechodzące przez punkt 0, co 15° .



Rozwiązanie:

Przepisujemy dane równanie w postaci

$$z^3 \cdot (z^4 + 4) = 8 \cdot (z^4 + 4),$$

czyli

$$(z^3 - 8) \cdot (z^4 + 4) = 0.$$

Rozwiązując równanie $z^4 + 4 = 0$, czyli $z^4 = -4$, stwierdzamy, że liczba zespolona -4 ma moduł 4 i argument π , w związku z czym jej pierwiastki czwartego stopnia mają moduł $\sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$, a jeden z nich ma argument $\pi/4$. Tym pierwiastkiem jest więc $\sqrt{2} \cdot (\cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{\pi}{4}) = 1 + i$. Pozostałe trzy rozwiązania tego równania leżą na okręgu o promieniu $\sqrt{2}$ co 90° .

Inaczej: liczba -4 ma moduł 4 i argument π , a zatem jej pierwiastki czwartego stopnia mają moduł $\sqrt{2}$ i argumenty $\pi/4 + k\pi/2$ dla $k = 0, 1, 2, 3$, czyli odpowiednio $\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$.

Z kolei rozwiązując równanie $z^3 - 8 = 0$, czyli $z^3 = 8$, zauważamy, że jego rozwiązaniem jest $z = 2$, a pozostałe dwa rozwiązania tego równania leżą na okręgu o promieniu 2 co 120° .

Inaczej: liczba 8 ma moduł 8 i argument 0, a zatem jej pierwiastki trzeciego stopnia mają moduł 2 i argumenty $2k\pi/3$ dla $k = 0, 1, 2$, czyli odpowiednio 0, $2\pi/3, 4\pi/3$.

Odpowiedź: Dane równanie ma 7 rozwiązań: $\pm_1 1 \pm_2 i$, 2 oraz $-1 \pm \sqrt{3}i$.

