

KOŁOKWIUM nr 2, 14.03.2017, godz. 12:15–13:00**Zadanie 3. (10 punktów)**

Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{2x+3}{x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3)} dx.$$

*Rozwiązanie:**Sposób I (normalny):*

Rozkładamy funkcję podcałkową na ułamki proste:

$$\begin{aligned} \frac{2x+3}{x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{D}{x+2} + \frac{E}{x+3}, \\ 2x+3 &= \frac{A \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3)}{x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3)} + \frac{B \cdot x \cdot (x+2) \cdot (x+3)}{x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3)} + \\ &+ \frac{D \cdot x \cdot (x+1) \cdot (x+3)}{x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3)} + \frac{E \cdot x \cdot (x+1) \cdot (x+2)}{x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3)}. \end{aligned} \quad (1)$$

W czasie, gdy miłośnicy rachunków są zajęci wymnażaniem wielomianu po prawej stronie równania (1), układaniem układu czterech równań liniowych z czterema niewiadomymi i rozwiązywaniem go, podstawimy do równości (1) kolejno $x=0, -1, -2, -3$. Otrzymujemy:

$$\text{dla } x=0 \quad 3=6A, \text{ skąd } A=1/2,$$

$$\text{dla } x=-1 \quad 1=-2B, \text{ skąd } B=-1/2,$$

$$\text{dla } x=-2 \quad -1=2D, \text{ skąd } D=-1/2,$$

$$\text{dla } x=-3 \quad -3=-6E, \text{ skąd } E=1/2.$$

To pozwala dokończyć obliczanie danej w zadaniu całki:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+3}{x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3)} dx &= \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} dx = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\ln|x| - \ln|x+1| - \ln|x+2| + \ln|x+3|) + C. \end{aligned}$$

Sposób II (trikowy):

Przepisujemy daną całkę w postaci

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+3}{x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3)} dx &= \int \frac{2x+3}{(x \cdot (x+3)) \cdot ((x+1) \cdot (x+2))} dx = \\ &= \int \frac{2x+3}{(x^2+3x) \cdot (x^2+3x+2)} dx, \end{aligned}$$

a następnie podstawiamy $t = x^2 + 3x$ i formalnie $dt = (2x+3) dx$. Otrzymujemy

$$\int \frac{2x+3}{(x^2+3x) \cdot (x^2+3x+2)} dx = \int \frac{dt}{t \cdot (t+2)}.$$

Rozkład na ułamki proste prowadzi do

$$\frac{1}{t \cdot (t+2)} = \frac{1/2}{t} - \frac{1/2}{t+2},$$

co pozwala dokończyć obliczenia:

$$\begin{aligned}\int \frac{dt}{t \cdot (t+2)} &= \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{t} - \frac{1}{t+2} dt = \frac{1}{2} \cdot (\ln |t| - \ln |t+2|) + C = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\ln |x^2 + 3x| - \ln |x^2 + 3x + 2|) + C.\end{aligned}$$

Zadanie 4. (10 punktów)

Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}.$$

Rozwiązanie:

Wykonując podstawienie $x = t^6$ i formalnie $dx = 6t^5 dt$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} &= \int \frac{6t^5 dt}{t^3 + t^2} = 6 \cdot \int \frac{t^3 dt}{t+1} = 6 \cdot \int \frac{(t^3+1)-1}{t+1} dt = 6 \cdot \int t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} dt = \\ &= 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6 \cdot \ln |t+1| + C = 2 \cdot \sqrt{x} - 3 \cdot \sqrt[3]{x} + 6 \cdot \sqrt[6]{x} - 6 \cdot \ln (\sqrt[6]{x} + 1) + C.\end{aligned}$$