

KOŁOKWIUM nr 4, 28.03.2017, godz. 12:15–13:00**Zadanie 6. (10 punktów)**

Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_1^3 \frac{x+1}{x^4+3x^2} dx.$$

Uprościć wynik doprowadzając go do postaci, która nie zawiera symbolu "arctg" i zawiera co najwyżej jeden symbol "ln".

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na ułamki proste:

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{(x^2+3) \cdot x^2} &= \frac{Ax+B}{x^2+3} + \frac{C}{x} + \frac{D}{x^2}, \\ x+1 &= (Ax+B) \cdot x^2 + C \cdot (x^3+3x) + D \cdot (x^2+3), \\ x+1 &= Ax^3 + Bx^2 + Cx^3 + 3Cx + Dx^2 + 3D, \\ \begin{cases} 0 &= A+C, \\ 0 &= B+D, \\ 1 &= 3C, \\ 1 &= 3D, \end{cases} \\ \begin{cases} C=D=1/3, \\ A=B=-1/3, \end{cases} \end{aligned}$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} \int_1^3 \frac{x+1}{x^4+3x^2} dx &= \frac{1}{3} \cdot \int_1^3 -\frac{x}{x^2+3} - \frac{1}{x^2+3} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} dx = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \int_1^3 -\frac{x}{x^2+3} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} dx - \frac{1}{3} \cdot \int_1^3 \frac{1}{x^2+3} dx. \end{aligned}$$

Obliczamy każdą z dwóch powyższych całek z osobna. W pierwszej całce otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_1^3 -\frac{x}{x^2+3} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} dx &= -\frac{\ln(x^2+3)}{2} + \ln|x| - \frac{1}{x} \Big|_{x=1}^3 = \\ &= -\frac{\ln 12}{2} + \ln 3 - \frac{1}{3} + \frac{\ln 4}{2} - \ln 1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{3} + \frac{\ln 3}{2}, \end{aligned}$$

a po podstawieniu $x = t\sqrt{3}$, $t = x/\sqrt{3}$, $dx = \sqrt{3} dt$ wyliczamy wartość drugiej całki

$$\begin{aligned} \int_1^3 \frac{1}{x^2+3} dx &= \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{3t^2+3} dt = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2+1} dt = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \arctg t \Big|_{t=1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}\pi}{18}. \end{aligned}$$

Wobec tego dana w zadaniu całka ma wartość

$$\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{\ln 3}{2} \right) - \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}\pi}{18} = \frac{2}{9} + \frac{\ln 3}{6} - \frac{\pi\sqrt{3}}{54}.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka ma wartość $\frac{2}{9} + \frac{\ln 3}{6} - \frac{\pi\sqrt{3}}{54}$.

Zadanie 7. (10 punktów)

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{k^2 - 2kn + 2n^2}.$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy sumę występującą pod znakiem granicy:

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{k^2 - 2kn + 2n^2} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^2 - 2 \cdot \frac{k}{n} + 2} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=n+1}^{2n} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

gdzie $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$.

Ponieważ funkcja f jest całkowalna jako funkcja ciągła, jej sumy Riemanna odpowiadające ciągowi podziałów przedziału całkowania na przedziały równej długości dążą do całki oznaczonej:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=n+1}^{2n} f\left(\frac{k}{n}\right) &= \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \frac{1}{x^2 - 2x + 2} dx = \int_1^2 \frac{1}{(x-1)^2 + 1} dx = \int_0^1 \frac{1}{t^2 + 1} dt = \\ &= \operatorname{arctg} t \Big|_{t=0}^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

gdzie po drodze wykonaliśmy podstawienie $t = x - 1$, z formalnym wzorem $dt = dx$ i przekształceniem przedziału całkowania $x \in [1, 2]$ na $t \in [0, 1]$. Otrzymujemy więc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{k^2 - 2kn + 2n^2} = \frac{\pi}{4}.$$