

KOŁOKWIUM nr 51, 6.03.2017, godz. 8:15–9:00**Zadanie 51. (10 punktów)**

Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \ln(x^2 + 1) dx.$$

Rozwiązanie:

Dopisujemy do funkcji podcałkowej czynnik 1, po czym wykonujemy całkowanie przez części całkując czynnik 1 i różniczkując $\ln(x^2 + 1)$. Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int \ln(x^2 + 1) dx &= \int 1 \cdot \ln(x^2 + 1) dx = x \cdot \ln(x^2 + 1) - \int x \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \\ &= x \cdot \ln(x^2 + 1) - 2 \int \frac{x^2 + 1 - 1}{x^2 + 1} dx = x \cdot \ln(x^2 + 1) - 2 \int dx + 2 \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \\ &= x \cdot \ln(x^2 + 1) - 2x + 2 \operatorname{arctg} x + C. \end{aligned}$$

Zadanie 52. (10 punktów)

Na wyspach Bergamutach podobno jest kot w butach i podobno zamiast zwykłych funkcji trygonometrycznych używają tam funkcji *losinus*, *nosinus* oraz *sosinus* podlegających następującym regułom różniczkowania:

$$\frac{d}{dx}\text{los}x = \text{nos}x, \quad \frac{d}{dx}\text{nos}x = \text{sos}x, \quad \frac{d}{dx}\text{sos}x = \text{los}x.$$

Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \text{los}^2 x \, dx$$

wyrażając wynik przy pomocy funkcji los, nos i sos.

Rozwiązanie:

Oznaczmy obliczaną całkę przez $I(x)$ i wykonajmy trzykrotnie całkowanie przez części. Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \text{los}^2 x \, dx = \int \text{los}x \cdot \text{los}x \, dx = \text{sos}x \cdot \text{los}x - \int \text{sos}x \cdot \text{nos}x \, dx = \\ &= \text{sos}x \cdot \text{los}x - \text{nos}x \cdot \text{nos}x + \int \text{nos}x \cdot \text{sos}x \, dx = \\ &= \text{sos}x \cdot \text{los}x - \text{nos}^2 x + \text{los}x \cdot \text{sos}x - \int \text{los}x \cdot \text{los}x \, dx = 2 \cdot \text{sos}x \cdot \text{los}x - \text{nos}^2 x - I(x). \end{aligned}$$

Dostaliśmy więc równanie

$$I(x) = 2 \cdot \text{sos}x \cdot \text{los}x - \text{nos}^2 x - I(x),$$

czyli

$$2 \cdot I(x) = 2 \cdot \text{sos}x \cdot \text{los}x - \text{nos}^2 x + C_1,$$

skąd otrzymujemy rozwiązanie zadania

$$\int \text{los}^2 x \, dx = I(x) = \text{sos}x \cdot \text{los}x - \frac{\text{nos}^2 x}{2} + C.$$

Uwaga:

Można było zakończyć rachunki po jednokrotnym całkowaniu przez części, jeśli zauważymy, że funkcja podcałkowa jest iloczynem pewnej funkcji i jej pochodnej:

$$\begin{aligned} \int \text{los}^2 x \, dx &= \text{sos}x \cdot \text{los}x - \int \text{sos}x \cdot \text{nos}x \, dx = \text{sos}x \cdot \text{los}x - \int \text{nos}'x \cdot \text{nos}x \, dx = \\ &= \text{sos}x \cdot \text{los}x - \frac{\text{nos}^2 x}{2} + C. \end{aligned}$$

Punktacja za całe kolokwium:

Liczba osób piszących kolokwium: **16**.

Uzyskane wyniki:

20 punktów – 6 osób (zwolnienie z kolokwium 1, kwalifikacja do kolokwium 81)

19 punktów – 2 osoby (zwolnienie z kolokwium 1, kwalifikacja do kolokwium 81)

12 punktów – 3 osoby

10 punktów – 3 osoby

8 punktów – 1 osoba

2 punkty – 1 osoba

Suma uzyskanych punktów: **234**.

Mnożnik kolokwium: **4** (zaokrąglone 1000/234).