

KOŁOKWIUM nr 52, 13.03.2017, godz. 8:15–9:00**Zadanie 53. (10 punktów)**

Wiedząc, że

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{oraz} \quad \frac{d}{dx} \operatorname{arbsin} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}$$

obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \operatorname{arbsin} x \, dx.$$

Oczywista oczywistość: Funkcja *arbus sinus* pochodzi z San Escobar i tylko tam jest używana.*Rozwiązanie:*Dopisujemy do funkcji podcałkowej czynnik 1, po czym wykonujemy całkowanie przez części całkując czynnik 1 i różniczkując $\operatorname{arbsin} x$. Otrzymujemy:

$$\int \operatorname{arbsin} x \, dx = \int 1 \cdot \operatorname{arbsin} x \, dx = x \cdot \operatorname{arbsin} x - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} \, dx.$$

W ostatniej całce wykonujemy podstawienie $t = x^2$, w którym stosujemy formalny wzór $dt = 2x \, dx$. Otrzymujemy:

$$\int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} \, dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2x \, dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\arcsin t}{2} + C_1 = \frac{\arcsin(x^2)}{2} + C_1.$$

W konsekwencji

$$\int \operatorname{arbsin} x \, dx = x \cdot \operatorname{arbsin} x - \frac{\arcsin(x^2)}{2} + C.$$

Punktacja:**10 punktów** - rozwiązanie poprawne (6 prac).**4 punkty** - niepoprawne całkowanie przez części, ale obliczone $\int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} \, dx$ (1 praca).**2 punkty** - poprawne całkowanie przez części (7 prac).

Zadanie 54. (10 punktów)

Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^6 - 64}} dx.$$

*Rozwiązanie:**Sposób I:*

Wykonujemy podstawienie $y = x^3$, co przy formalnym wzorze $dy = 3x^2 dx$ prowadzi do:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^6 - 64}} dx = \frac{1}{3} \cdot \int \frac{3x^2 dx}{\sqrt{x^6 - 64}} = \frac{1}{3} \cdot \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 64}} = \frac{1}{3} \cdot \int \frac{dy}{\sqrt{(y-8) \cdot (y+8)}}.$$

Następnie podstawiamy

$$t = \sqrt{\frac{y-8}{y+8}},$$

co wiąże się z wzorami:

$$t^2 = \frac{y-8}{y+8},$$

$$t^2 = 1 - \frac{16}{y+8},$$

$$\frac{1}{y+8} = \frac{1-t^2}{16},$$

$$y+8 = \frac{16}{1-t^2},$$

$$y = \frac{16}{1-t^2} - 8 = \frac{8+8t^2}{1-t^2} = \frac{8 \cdot (1+t^2)}{1-t^2},$$

$$dy = \frac{32t}{(1-t^2)^2} dt.$$

Oznaczając $\pm = \operatorname{sgn}(y+8)$ otrzymujemy:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(y-8) \cdot (y+8)}} = \pm \int \frac{1}{(y+8) \cdot \sqrt{\frac{y-8}{y+8}}} dy = \pm \int \frac{1-t^2}{16} \cdot \frac{1}{t} \cdot \frac{32t}{(1-t^2)^2} dt = \pm 2 \cdot \int \frac{dt}{1-t^2}.$$

Korzystając z rozkładu na ułamki proste otrzymujemy:

$$\int \frac{dt}{1-t^2} = - \int \frac{1}{(t-1)(t+1)} dt = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{(t+1)} - \frac{1}{(t-1)} dt = \frac{\ln|t+1|}{2} - \frac{\ln|t-1|}{2} + C_1.$$

Połączenie wszystkich obliczeń daje

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{x^6 - 64}} dx &= \pm \frac{\ln|t+1|}{3} \mp \frac{\ln|t-1|}{3} + C = \pm \frac{\ln\left|1 + \sqrt{\frac{y-8}{y+8}}\right|}{3} \mp \frac{\ln\left|1 - \sqrt{\frac{y-8}{y+8}}\right|}{3} + C = \\ &= \pm \frac{\ln\left|1 + \sqrt{\frac{x^3-8}{x^3+8}}\right|}{3} \mp \frac{\ln\left|1 - \sqrt{\frac{x^3-8}{x^3+8}}\right|}{3} + C = \\ &= \pm \frac{\ln\left|x^3+8 \pm \sqrt{x^6-64}\right|}{3} \mp \frac{\ln\left|x^3+8 \mp \sqrt{x^6-64}\right|}{3} + C = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\ln \left| x^3 + 8 + \sqrt{x^6 - 64} \right|}{3} - \frac{\ln \left| x^3 + 8 - \sqrt{x^6 - 64} \right|}{3} + C = \frac{1}{3} \cdot \ln \left| \frac{x^3 + 8 + \sqrt{x^6 - 64}}{x^3 + 8 - \sqrt{x^6 - 64}} \right| + C = \\
&= \frac{1}{3} \cdot \ln \left| \frac{\left(x^3 + 8 + \sqrt{x^6 - 64} \right)^2}{(x^3 + 8)^2 - \left(\sqrt{x^6 - 64} \right)^2} \right| + C = \\
&= \frac{1}{3} \cdot \ln \left| \frac{x^6 + 16x^3 + 64 + x^6 - 64 + (2x^3 + 16) \cdot \sqrt{x^6 - 64}}{16x^3 + 128} \right| + C = \\
&= \frac{1}{3} \cdot \ln \left| \frac{2x^6 + 16x^3 + (2x^3 + 16) \cdot \sqrt{x^6 - 64}}{16x^3 + 128} \right| + C = \\
&= \frac{1}{3} \cdot \ln \left| \frac{x^3 + \sqrt{x^6 - 64}}{8} \right| + C = \frac{1}{3} \cdot \ln \left| x^3 + \sqrt{x^6 - 64} \right| + C_2.
\end{aligned}$$

Sposób II:

Wykonujemy podstawienie $y = x^3$, co przy formalnym wzorze $dy = 3x^2 dx$ prowadzi do:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^6 - 64}} dx = \frac{1}{3} \cdot \int \frac{3x^2 dx}{\sqrt{x^6 - 64}} = \frac{1}{3} \cdot \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 64}}.$$

Następnie podstawiamy

$$t = y + \sqrt{y^2 - 64},$$

co wiąże się z wzorami:

$$t - y = \sqrt{y^2 - 64},$$

$$t^2 - 2ty + y^2 = y^2 - 64,$$

$$t^2 - 2ty = -64,$$

$$y = \frac{64 + t^2}{2t} = \frac{32}{t} + \frac{t}{2},$$

$$dy = \left(-\frac{32}{t^2} + \frac{1}{2} \right) dt = \frac{-64 + t^2}{2t^2} dt,$$

$$\sqrt{y^2 - 64} = t - y = -\frac{32}{t} + \frac{t}{2} = \frac{-64 + t^2}{2t}.$$

Otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{x^6 - 64}} dx &= \frac{1}{3} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{y^2 - 64}} dy = \frac{1}{3} \cdot \int \frac{2t}{-64 + t^2} \cdot \frac{-64 + t^2}{2t^2} dt = \frac{1}{3} \cdot \int \frac{dt}{t} = \\
&= \frac{1}{3} \cdot \ln |t| + C = \frac{1}{3} \cdot \ln \left| y + \sqrt{y^2 - 64} \right| + C = \frac{1}{3} \cdot \ln \left| x^3 + \sqrt{x^6 - 64} \right| + C.
\end{aligned}$$

Punktacja:

10 punktów - rozwiązanie poprawne (2 prace).

5-7 punktów - poprawna metoda, ale rachunki z poważnymi błędami lub niedokończone (3 prace).

4 punkty - podane poprawne podstawienie/a, ale rachunki niedokończone (2 prace).

2 punkty - wykonane podstawienie $y = x^3$ lub podana dobra postać dalszego podstawienia, ale bez poprawnych rachunków (5 prac).

0 punktów - brak istotnych kroków w kierunku rozwiązania (2 prace).

Punktacja za całe kolokwium:

Liczba osób piszących kolokwium: **14**.

Uzyskane wyniki:

20 punktów – 2 osoby (zwolnienie z kolokwium 2, kwalifikacja do kolokwium 82)

17 punktów – 1 osoba (zwolnienie z kolokwium 2, kwalifikacja do kolokwium 82)

16 punktów – 1 osoba (zwolnienie z kolokwium 2, kwalifikacja do kolokwium 82)

15 punktów – 1 osoba (zwolnienie z kolokwium 2, kwalifikacja do kolokwium 82)

12 punktów – 1 osoba (zwolnienie z kolokwium 2, kwalifikacja do kolokwium 82)

6 punktów – 3 osoby

4 punkty – 3 osoby

2 punkty – 2 osoby

Suma uzyskanych punktów: **134**.

Mnożnik kolokwium: **7** (zaokrąglone $1000/134$).

Ponadto zwolnienie z kolokwium 2 i kwalifikację do kolokwium 82 otrzymują dwie osoby mające oceny 19-20 z kolokwium 51 i ocenę 6 z kolokwium 52.

Innymi słowy: Zwolnienie z kolokwium 2 i kwalifikacja do kolokwium 82 przysługuje osobom mającym w tej chwili co najmniej 118 punktów jako **Wynik LUX**.