

KOŁOKWIUM nr 53, 20.03.2017, godz. 8:15–9:00**Zadanie 55. (10 punktów)**

Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_1^{25} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt{x+24}}.$$

Rozwiązanie:

Po skorzystaniu ze wzoru na różnicę kwadratów otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_1^{25} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt{x+24}} &= \int_1^{25} \frac{\sqrt{x+24} - \sqrt{x}}{24} dx = \frac{1}{24} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot (x+24)^{3/2} - \frac{2}{3} \cdot x^{3/2} \right) \Bigg|_{x=1}^{25} = \\ &= \frac{1}{36} \cdot \left((x+24)^{3/2} - x^{3/2} \right) \Bigg|_{x=1}^{25} = \frac{1}{36} \cdot (343 - 125 - 125 + 1) = \frac{94}{36} = \frac{47}{18}. \end{aligned}$$

Punktacja:**10 punktów** - rozwiązanie poprawne (4 prace).**8 punktów** - poprawna metoda, ale z istotnym błędem rachunkowym i nieuproszczonym wynikiem (1 praca).**2 punkty** - skorzystanie ze wzoru na różnicę kwadratów (1 praca).**0 punktów** - brak istotnych kroków w kierunku rozwiązania (9 prac).

Zadanie 56. (10 punktów)

Udowodnić nierówność

$$\int_{1/4}^{1/2} x^{2x} dx < \frac{1}{8}.$$

*Rozwiązanie:*Pochodna funkcji podcałkowej $f(x) = x^{2x}$ dana jest wzorem

$$f'(x) = \frac{d}{dx} x^{2x} = \frac{d}{dx} e^{2x \cdot \ln x} = e^{2x \cdot \ln x} \cdot \frac{d}{dx} (2x \cdot \ln x) = x^{2x} \cdot (2 \cdot \ln x + 2) = 2 \cdot x^{2x} \cdot (\ln x + 1).$$

Ponieważ $f'(x) > 0$ dla $x > 1/e$ oraz $f'(x) < 0$ dla $0 < x < 1/e$, funkcja f jest malejąca w przedziale $(0, 1/e)$ i rosnąca w przedziale $(1/e, +\infty)$. Zauważmy ponadto, że

$$f(1/4) = 1/2$$

oraz

$$f(1/2) = 1/2.$$

Wobec tego $f(x) < 1/2$ dla $x \in (1/4, 1/2)$, skąd

$$\int_{1/4}^{1/2} x^{2x} dx < \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

Uwaga: Obliczenia komputerowe pokazują, że dana w zadaniu całka ma wartość w przybliżeniu 0,1215. Wydaje się to być zbyt bliskie oszacowaniu $1/8 = 0,125$, aby zadziałały inne metody szacowania (zapewne obarczone większym błędem).

Punktacja:**10 punktów** - rozwiązanie poprawne (4 prace).**7 punktów** - poprawna metoda, ale błędne i nieprawdopodobne wnioski z powodu błędnych rachunków (2 prace).**3 punkty** - obliczenie wartości funkcji podcałkowej na końcach przedziału, oszacowanie przez $1/2$ wartości w punkcie pośrednim, wysnucie hipotezy o przebiegu funkcji podcałkowej i wykorzystanie nieudowodnionego oszacowania funkcji podcałkowej przez $1/2$ do oszacowania całki (2 prace).**1-2 punkty** - drobne kroki mogące przydać się w rozwiązaniu (3 prace).**0 punktów** - brak istotnych kroków w kierunku rozwiązania (4 prace).**Punktacja za całe kolokwium:**Liczba osób piszących kolokwium: **15**.

Uzyskane wyniki:

17 punktów – 1 osoba**13 punktów** – 1 osoba**12 punktów** – 1 osoba**10 punktów** – 6 osób**7 punktów** – 1 osoba**3 punkty** – 1 osoba

2 punkty – 1 osoba

1 punkty – 1 osoba

0 punktów – 2 osoby

Suma uzyskanych punktów: **115**.

Mnożnik kolokwium: **9** (zaokrąglone $1000/115$).

Zwolnienie z kolokwium 3 i kwalifikacja do kolokwium 83 przysługuje 7 osobom mającym w tej chwili co najmniej 208 punktów w USOSie jako **Wynik LUX**.