

KOŁOKWIUM nr 54, 27.03.2017, godz. 8:15–9:15**Zadanie 57.** (10 punktów)

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k + \sqrt{k}}.$$

*Rozwiązanie:**Sposób I:*

Zauważmy najpierw, że przyjmując $f(x) = 1/x$ i korzystając z całkowalności funkcji f na przedziale $[1, 2]$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} f(k/n) = \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln |x| \Big|_{x=1}^2 = \\ &= \ln 2 - \ln 1 = \ln 2. \end{aligned}$$

Ponadto prawdziwe są oszacowania

$$\begin{aligned} \ln 2 &\leftarrow \frac{1}{1 + 1/\sqrt{n}} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k(1 + 1/\sqrt{n})} < \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k(1 + 1/\sqrt{k})} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k + \sqrt{k}} \\ &\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k + \sqrt{k}} < \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \rightarrow \ln 2, \end{aligned}$$

z których na mocy twierdzenia o trzech ciągach wynika, że dana w zadaniu granica ma wartość $\ln 2$.

Sposób II (na podstawie pomysłu Panów Damiana Szuby i Kacpra Wodianego):

Stosując wzór na różnicę kwadratów otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k + \sqrt{k}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k - \sqrt{k}}{k^2 - k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k-1} - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sqrt{k}}{k^2 - k}.$$

Podobnie jak w sposobie I otrzymujemy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k-1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} f(k/n) = \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \\ &= \ln |x| \Big|_{x=1}^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2. \end{aligned}$$

Pozostaje obliczyć $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sqrt{k}}{k^2 - k}$. W tym celu zauważamy, że wobec $k \geq 2$ zachodzą oszacowania

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sqrt{k}}{k^2 - k} \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sqrt{k}}{k^2 - k^2/2} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sqrt{k}}{k^2/2} = 2 \cdot \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k \cdot \sqrt{k}} \leq 2 \cdot \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{n \cdot \sqrt{n}} = \\ &= 2 \cdot n \cdot \frac{1}{n \cdot \sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n}} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

skąd na podstawie twierdzenia o trzech ciągach

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sqrt{k}}{k^2 - k} = 0. \quad (\heartsuit)$$

Punktacja:

10 punktów - rozwiązanie dające się wybronić (1 praca).

5 punktów - sposób II bez poradzenia sobie z granicą ($\heartsuit$) (2 prace).

2 punkty - dowód, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \ln 2$, bez wykazania związku z granicą daną w zadaniu (2 prace).

0 punktów - brak istotnych kroków w kierunku rozwiązania (8 prac).

Zadanie 58. (20 punktów)**a) (10 punktów)** Udowodnić nierówności

$$L = \sum_{k=101}^{10\,000} \frac{1}{\sqrt{k}} < 180 < \sum_{k=100}^{9\,999} \frac{1}{\sqrt{k}} = P.$$

Rozwiązanie:

Rozważmy funkcję $f(x) = 1/\sqrt{x}$ i zauważmy, że funkcja ta jest malejąca w przedziale $[100, 10\,000]$.

Wobec tego jej całka oznaczona

$$\int_{100}^{10\,000} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \Big|_{x=100}^{10\,000} = 200 - 20 = 180$$

jest większa od sumy Riemanna odpowiadającej podziałowi przedziału całkowania na 9900 przedziałów długości 1, jeśli sumujemy wartości funkcji w prawych końcach przedziałów podziału.

Ogólna nierówność ma postać

$$\int_a^b f(x) dx > \sum_{k=a+1}^b f(k) \quad a, b \in \mathbb{Z}, f \text{ malejąca na } [a, b]$$

i jest poglądowo przedstawiona na rysunku 1.

W naszym przypadku otrzymujemy $L < 180$, czyli lewą z dowodzonych nierówności.

Podobnie, sumy Riemanna dla tego samego podziału, ale przy sumowaniu wartości funkcji w lewych końcach przedziałów podziału, dają ogólną nierówność

$$\int_a^b f(x) dx < \sum_{k=a}^{b-1} f(k) \quad a, b \in \mathbb{Z}, f \text{ malejąca na } [a, b]$$

poglądowo przedstawioną na rysunku 2.

W naszym przypadku dostajemy $P > 180$, czyli prawą z dowodzonych nierówności.

b) (10 punktów) Rozstrzygnąć, która liczba jest większa: $L + P$ czy 360 ?

Rozwiązanie:

Zauważmy, że pochodna $f'(x) = -\frac{1}{2x^{3/2}}$ jest rosnąca w przedziale $[100, 10\,000]$, skąd wynika, że sama funkcja f jest w tym przedziale ściśle wypukła.

Wobec tego wzór związany z metodą trapezów daje nierówność

$$\int_a^b f(x) dx < \frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=a+1}^{b-1} f(k) \quad a, b \in \mathbb{Z}, f \text{ wypukła na } [a, b]$$

przedstawioną poglądowo na rysunkach 3 i 4.

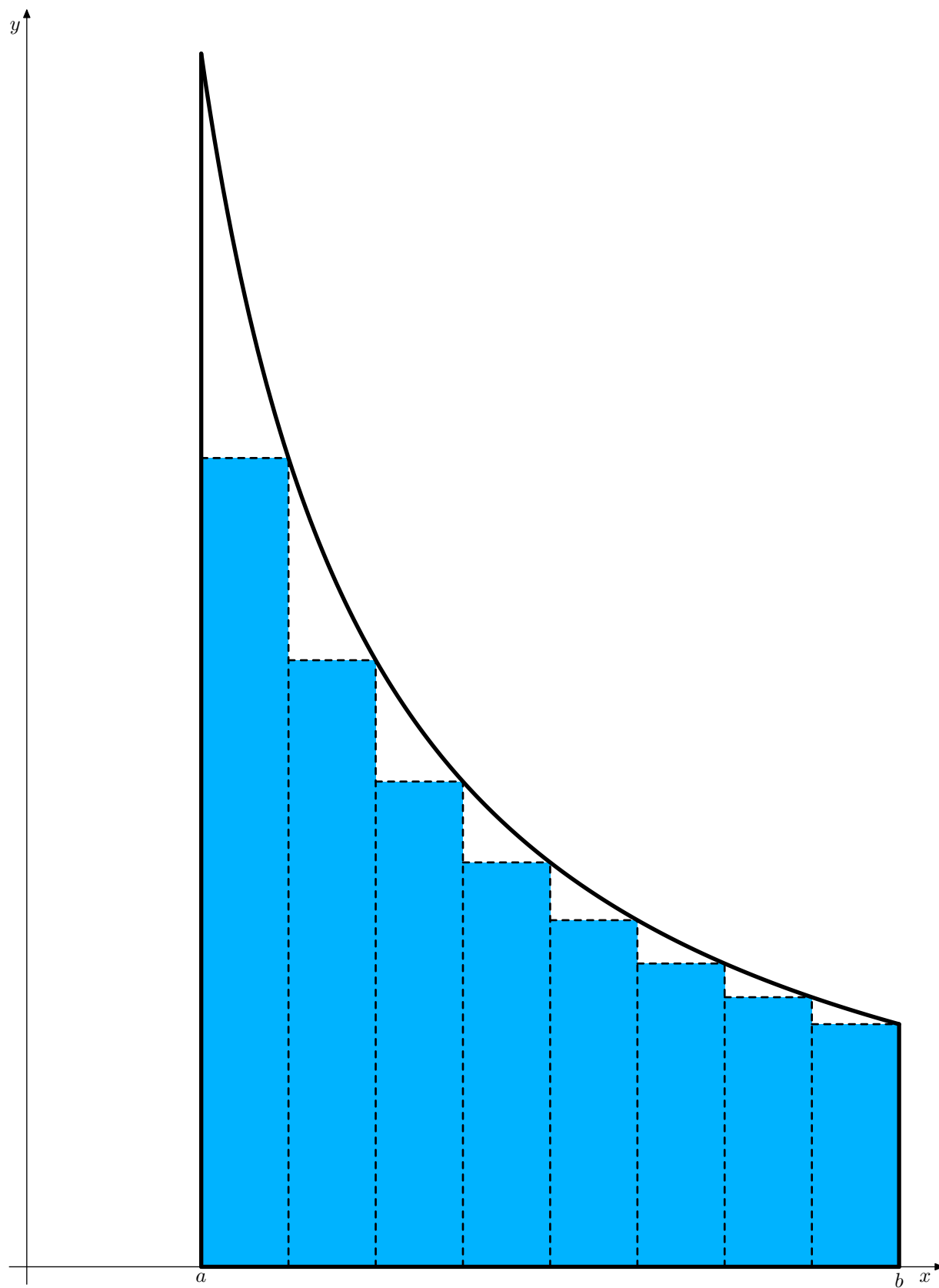
W naszym przypadku dostajemy $\frac{L+P}{2} > 180$, skąd wynika, że $L + P > 360$.

Uwaga: Bezpośrednie obliczenia przy użyciu komputera pokazują, że

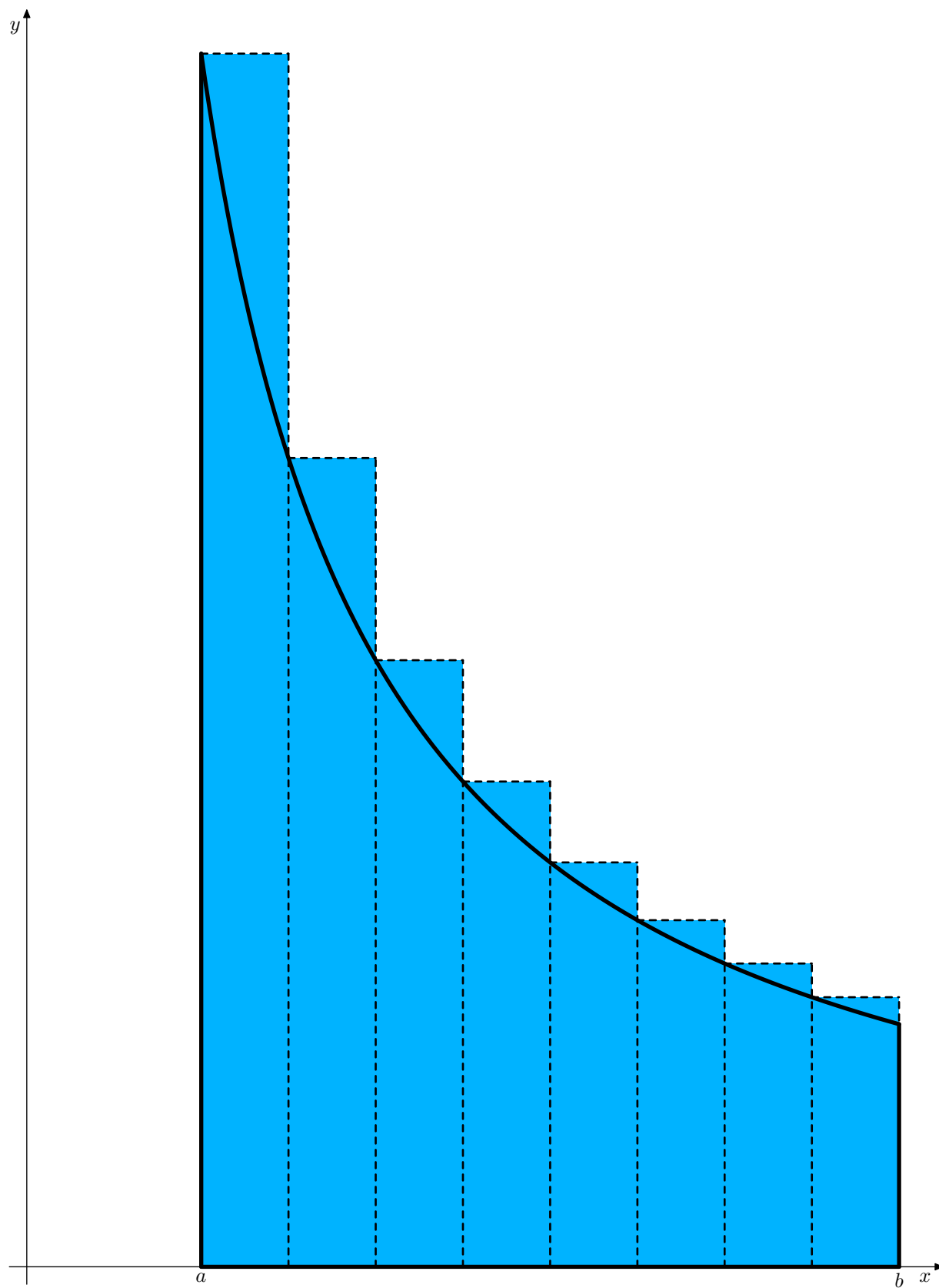
$$L \approx 179,9550416,$$

$$P \approx 180,0450416,$$

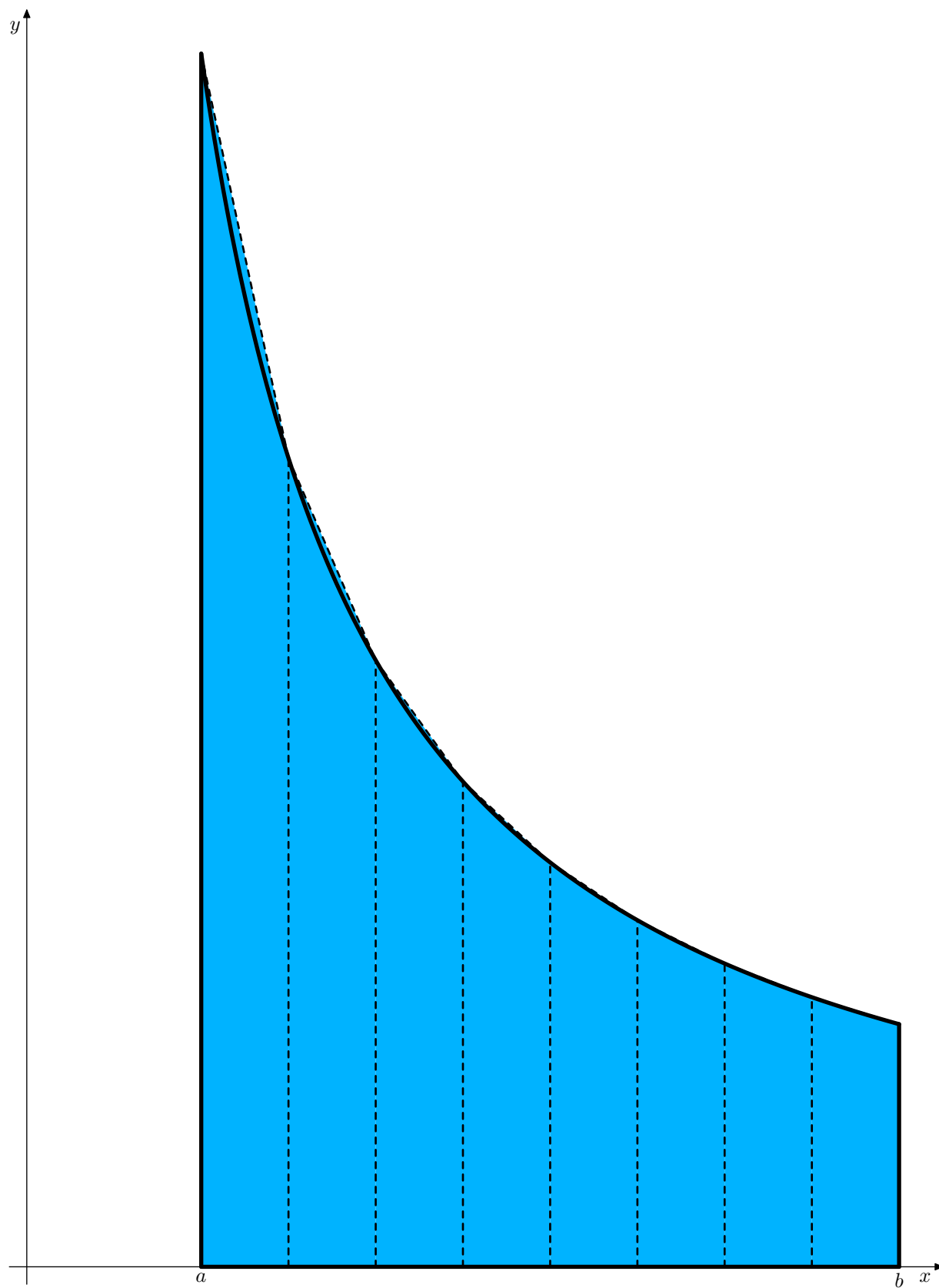
$$L + P \approx 360,00008324.$$



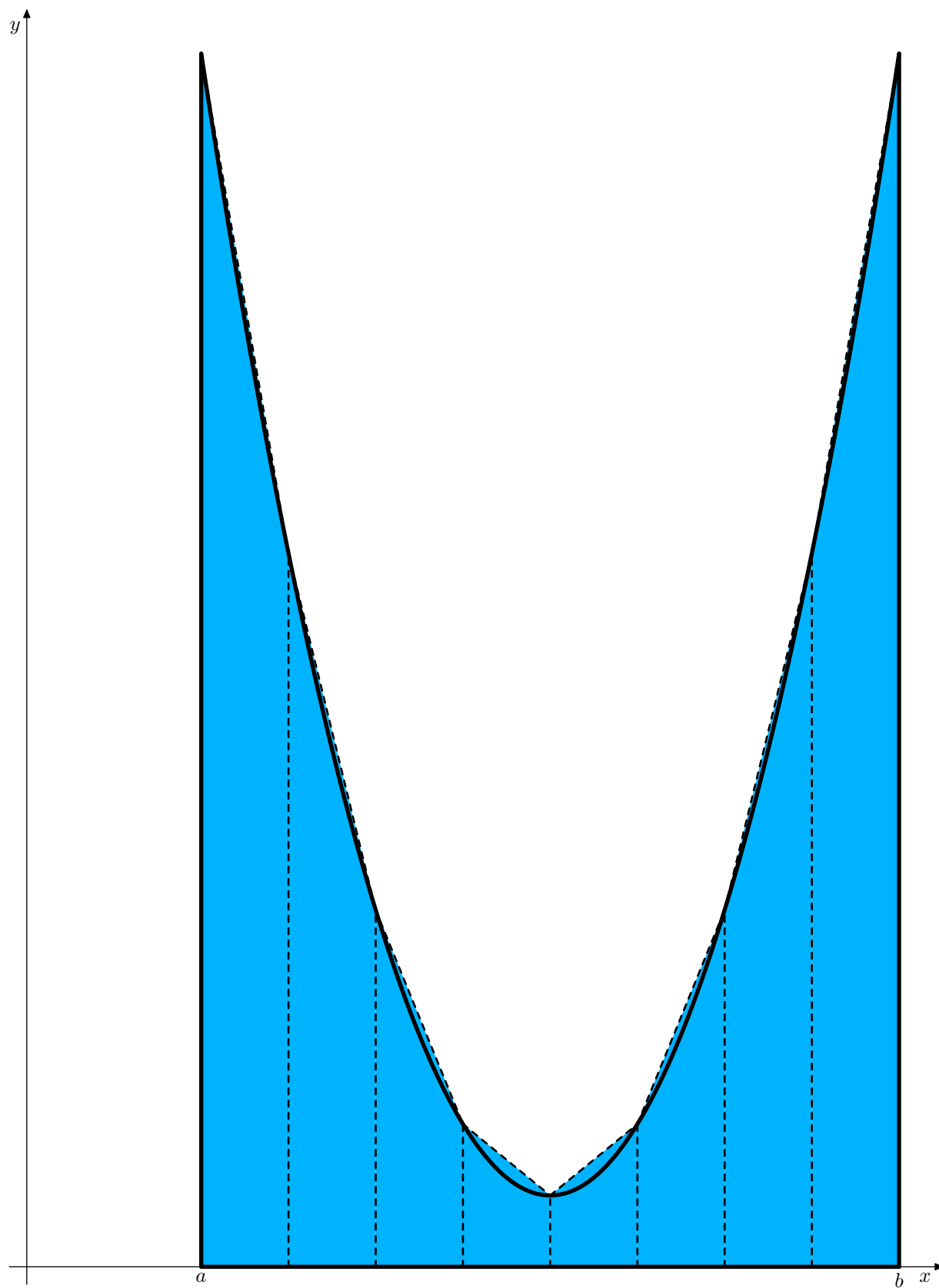
rys. 1



rys. 2



rys. 3



rys. 4

Punktacja:

10 punktów - rozwiązanie części **a)** poprawne (1 praca).

0 punktów - brak istotnych kroków w kierunku rozwiązania (12 prac).

Punktacja za całe kolokwium:

Liczba osób piszących kolokwium: **13**.

Uzyskane wyniki:

20 punktów – 1 osoba

5 punktów – 2 osoby

2 punkty – 2 osoby

0 punktów – 8 osób

Suma uzyskanych punktów: **34**.

Mnożnik kolokwium: **29** (zaokrąglone $1000/34$).

Zwolnienie z kolokwium 4 i kwalifikacja do kolokwium 84 przysługuje 6 osobom mającym w tej chwili co najmniej 310 punktów w USOSie jako **Wynik LUX**.