

KOŁOKWIUM nr 55, 3.04.2017, godz. 8:15–9:00**Zadanie 59. (10 punktów)**

Obliczyć wartość całki niewłaściwej $\int_3^{\infty} \frac{x^2+x+1}{x^4-1} dx$ lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\begin{aligned} \frac{x^2+x+1}{x^4-1} &= \frac{x^2+x+1}{(x-1) \cdot (x+1) \cdot (x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}, \\ x^2+x+1 &= A \cdot (x+1) \cdot (x^2+1) + B \cdot (x-1) \cdot (x^2+1) + (Cx+D) \cdot (x^2-1), \\ x^2+x+1 &= Ax^3 + Ax^2 + Ax + A + Bx^3 - Bx^2 + Bx - B + Cx^3 - Cx + Dx^2 - D, \\ \begin{cases} 0 &= A+B+C \\ 1 &= A-B+D \\ 1 &= A+B-C \\ 1 &= A-B-D \end{cases} \end{aligned}$$

Konfrontacja równań drugiego i czwartego daje $D=0$, natomiast odjęcie stronami równań pierwszego i trzeciego prowadzi do $C=-1/2$. Uwzględnienie tych wartości pozostawia równania

$$\begin{cases} 1/2 &= A+B \\ 1 &= A-B \end{cases}$$

Stąd łatwo otrzymujemy $A=3/4$ i $B=-1/4$.

Wobec tego

$$\begin{aligned} \int_3^{\infty} \frac{x^2+x+1}{x^4-1} dx &= \int_3^{\infty} \frac{3/4}{x-1} - \frac{1/4}{x+1} - \frac{x/2}{x^2+1} dx = \frac{1}{4} \cdot \int_3^{\infty} \frac{3}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{2x}{x^2+1} dx = \\ &= \frac{3 \ln |x-1|}{4} - \frac{\ln |x+1|}{4} - \frac{\ln (x^2+1)}{4} \Big|_{x=3}^{\infty} = \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3 \ln |x-1|}{4} - \frac{\ln |x+1|}{4} - \frac{\ln (x^2+1)}{4} \right) \right) - \frac{3 \ln 2}{4} + \frac{\ln 4}{4} + \frac{\ln 10}{4} = \\ &= \left(\frac{1}{4} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{(x-1)^3}{(x+1) \cdot (x^2+1)} \right) + \frac{-3 \ln 2 + \ln 4 + \ln 10}{4} = \\ &= \left(\frac{1}{4} \cdot \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)^3}{(x+1) \cdot (x^2+1)} \right) + \frac{\ln 5}{4} = \frac{1}{4} \cdot \ln 1 + \frac{\ln 5}{4} = \frac{\ln 5}{4}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Podana całka niewłaściwa jest zbieżna i ma wartość $\frac{\ln 5}{4}$.

Uwaga: Całki

$$\int_3^{\infty} \frac{3}{x-1} dx, \quad \int_3^{\infty} \frac{1}{x+1} dx, \quad \int_3^{\infty} \frac{2x}{x^2+1} dx$$

są rozbieżne, a granice

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 \ln |x-1|}{4}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln |x+1|}{4}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln (x^2+1)}{4}$$

są nieskończone. Odpowiednie poradzenie sobie z przejściem granicznym jest istotną częścią zadania.

Punktacja:

10 punktów - rozwiązanie poprawne (2 prace).

9 punktów - metoda poprawna, błąd rachunkowy (1 praca).

8 punktów - metoda poprawna, zapisanie całek rozbieżnych, z późniejszym połączeniem w jedno wyrażenie (1 praca).

7 punktów - metoda poprawna, błędny rozkład na ułamki proste (postać rozkładu ułatwiająca dalsze rachunki) (1 praca).

4 punkty - poprawne wyznaczenie funkcji pierwotnej, z wnioskowaniem rozbieżności całki (2 prace).

3 punkty - metoda prowadząca do funkcji pierwotnej, ale z wieloma błędami rachunkowymi, zapisywanie wyrażeń rozbieżnych, obarczona błędami próba połączenia ich w wyrażenie zbieżne (1 praca).

1 punkt - obarczone błędami rachunkowymi usiłowanie rozkładu na ułamki proste i zapisanie funkcji pierwotnej w uproszczonym przypadku (1 praca).

0 punktów - brak istotnych kroków w kierunku rozwiązania (3 prace).

Zadanie 60. (10 punktów)

Wyznaczyć środek ciężkości odcinka kuli

$$\left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \wedge x \geq -\frac{1}{3} \right\}.$$

Interesująca współrzędna środka ciężkości jest liczbą wymierną o jednocyfrowym liczniku i mianowniku.

Rozwiązanie:

Zdefiniowany w treści zadania odcinek kuli powstaje przez obrót obszaru

$$\left\{ (x, y) : -\frac{1}{3} \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \right\}$$

wokół osi OX. Jego środek ciężkości leży więc w punkcie $(x_s, 0, 0)$, gdzie

$$x_s = \frac{\pi \cdot \int_{-1/3}^1 x \cdot (\sqrt{1-x^2})^2 dx}{\pi \cdot \int_{-1/3}^1 (\sqrt{1-x^2})^2 dx}.$$

Obliczamy:

$$\begin{aligned} \int_{-1/3}^1 x \cdot (\sqrt{1-x^2})^2 dx &= \int_{-1/3}^1 x - x^3 dx = \left. \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right|_{x=-1/3}^1 = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{18} + \frac{1}{324} = \frac{162 - 81 - 18 + 1}{324} = \frac{64}{324} = \frac{16}{81} \end{aligned}$$

oraz

$$\int_{-1/3}^1 (\sqrt{1-x^2})^2 dx = \int_{-1/3}^1 1 - x^2 dx = \left. x - \frac{x^3}{3} \right|_{x=-1/3}^1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{81} = \frac{81 - 27 + 27 - 1}{81} = \frac{80}{81},$$

skąd

$$x_s = \frac{16/81}{80/81} = \frac{1}{5}.$$

Odpowiedź: Środek ciężkości odcinka kuli zdefiniowanego w treści zadania leży w punkcie $\left(\frac{1}{5}, 0, 0\right)$.

Punktacja:**10 punktów** - rozwiązanie poprawne (3 prace).**9 punktów** - rozwiązanie poprawne z błędami rachunkowymi – podana wskazówka o postaci wyniku powinna zasygnalizować błąd (1 praca).**8 punktów** - rozwiązanie poprawne z błędami rachunkowymi i niemożliwym wynikiem – środek ciężkości na brzegu obszaru (1 praca).**6 punktów** - niedokończone rachunki, ale poprawny wzór na współrzędną środka ciężkości (1 praca).**2 punkty** - drobne kroki w kierunku rozwiązania (2 prace).**0 punktów** - brak istotnych kroków w kierunku rozwiązania (4 prace).

Punktacja za całe kolokwium:

Liczba osób piszących kolokwium: **12**.

Suma uzyskanych punktów: **113**.

Mnożnik kolokwium: **9** (zaokrąglone $1000/113$).

Zwolnienie z kolokwium 5 i kwalifikacja do kolokwium 85 przysługuje 7 osobom mającym w tej chwili co najmniej 325 punktów w USOSie jako **Wynik LUX**.