

KOŁOKWIUM nr 56, 10.04.2017, godz. 8:15–9:00**Zadanie 61.** (10 punktów)

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^6 \cdot \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{(k + \sqrt{k})^7} \right).$$

Rozwiązanie:

Zauważmy najpierw, że przyjmując $f(x) = x^{-7}$ i korzystając z całkowalności funkcji f na przedziale $[1, 2]$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^6 \cdot \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^7} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{(k/n)^7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} f(k/n) = \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \frac{dx}{x^7} = \\ &= -\frac{1}{6 \cdot x^6} \Big|_{x=1}^2 = -\frac{1}{6 \cdot 2^6} + \frac{1}{6} = \frac{64-1}{6 \cdot 64} = \frac{63}{6 \cdot 64} = \frac{21}{2 \cdot 64} = \frac{21}{128}. \end{aligned}$$

Ponadto prawdziwe są oszacowania

$$\begin{aligned} 21/128 &\leftarrow \frac{1}{(1+1/\sqrt{n})^7} \cdot n^6 \cdot \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^7} = n^6 \cdot \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^7 (1+1/\sqrt{n})^7} < n^6 \cdot \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^7 (1+1/\sqrt{k})^7} = \\ &= n^6 \cdot \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{(k + \sqrt{k})^7} < n^6 \cdot \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^7} \rightarrow 21/128, \end{aligned}$$

z których na mocy twierdzenia o trzech ciągach wynika, że dana w zadaniu granica ma wartość $21/128$.

Punktacja:

4 punkty - poprawna odpowiedź liczbowa, ale brak oszacowania od dołu (4 prace).

0 punktów - brak istotnych kroków w kierunku rozwiązania (7 prac).

Zadanie 62. (20 punktów)**a) (10 punktów)** Udowodnić nierówności

$$L = \sum_{k=101}^{300} \frac{1}{k^2 + 30\,000} < \frac{\pi}{600\sqrt{3}} < \sum_{k=100}^{299} \frac{1}{k^2 + 30\,000} = P.$$

*Rozwiązanie:*Rozważmy funkcję f określoną wzorem

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 30\,000}$$

i zauważmy, że funkcja ta jest malejąca w przedziale $[100, 300]$.Wobec tego jej całka oznaczona, którą obliczamy wykonując podstawienie $x = 100\sqrt{3}t$ i formalnie $dx = 100\sqrt{3} dt$,

$$\begin{aligned} \int_{100}^{300} \frac{dx}{x^2 + 30\,000} &= \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{100\sqrt{3} dt}{30\,000 \cdot t^2 + 30\,000} = \frac{1}{100\sqrt{3}} \cdot \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{100\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg} t \Big|_{t=1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \\ &= \frac{1}{100\sqrt{3}} \cdot \left(\operatorname{arctg} \sqrt{3} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{1}{100\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{100\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{600\sqrt{3}} \end{aligned}$$

jest większa od sumy Riemanna odpowiadającej podziałowi przedziału całkowania na 200 przedziałów długości 1, jeśli sumujemy wartości funkcji w prawych końcach przedziałów podziału.

Ogólna nierówność ma postać

$$\int_a^b f(x) dx > \sum_{k=a+1}^b f(k) \quad a, b \in \mathbb{Z}, f \text{ malejąca na } [a, b]$$

i jest poglądowo przedstawiona na rysunku w rozwiązaniu zadania 58 z kolokwium 54.

W naszym przypadku otrzymujemy $L < \frac{\pi}{600\sqrt{3}}$, czyli lewą z dowodzonych nierówności.

Podobnie, sumy Riemanna dla tego samego podziału, ale przy sumowaniu wartości funkcji w lewych końcach przedziałów podziału, dają ogólną nierówność

$$\int_a^b f(x) dx < \sum_{k=a}^{b-1} f(k) \quad a, b \in \mathbb{Z}, f \text{ malejąca na } [a, b]$$

poglądowo przedstawioną na rysunku w rozwiązaniu zadania 58 z kolokwium 54.

W naszym przypadku dostajemy $P > \frac{\pi}{600\sqrt{3}}$, czyli prawą z dowodzonych nierówności.**b) (10 punktów)** Rozstrzygnąć, która liczba jest większa: $L + P$ czy $\frac{\pi}{300\sqrt{3}}$?*Rozwiązanie:*

Zauważmy, że

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2 + 30\,000)^2}$$

oraz

$$f''(x) = \frac{2 \cdot 2x \cdot 2x}{(x^2 + 30\,000)^3} - \frac{2}{(x^2 + 30\,000)^2} = \frac{8x^2}{(x^2 + 30\,000)^3} - \frac{2x^2 + 60\,000}{(x^2 + 30\,000)^3} =$$

$$= \frac{6x^2 - 60\,000}{(x^2 + 30\,000)^3} = \frac{6 \cdot (x^2 - 10\,000)}{(x^2 + 30\,000)^3} = \frac{6 \cdot (x - 100) \cdot (x + 100)}{(x^2 + 30\,000)^3}.$$

Zatem f'' jest dodatnia w przedziale $[100, 300]$, skąd wynika, że sama funkcja f jest w tym przedziale ściśle wypukła.

Wobec tego wzór związany z metodą trapezów daje nierówność

$$\int_a^b f(x) dx < \frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=a+1}^{b-1} f(k) \quad a, b \in \mathbb{Z}, f \text{ wypukła na } [a, b]$$

przedstawioną poglądowo na rysunkach w rozwiązaniu zadania 58 z kolokwium 54.

W naszym przypadku dostajemy $\frac{L+P}{2} > \frac{\pi}{600\sqrt{3}}$, skąd wynika, że $L+P > \frac{\pi}{300\sqrt{3}}$.

Uwaga: Bezpośrednie obliczenia przy użyciu komputera pokazują, że

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{600\sqrt{3}} &\approx 0,0030229989403903630843, \\ L &\approx 0,0030146725515304093806, \\ P &\approx 0,0030313392181970760473, \\ \frac{\pi}{300\sqrt{3}} &\approx 0,0060459978807807261686, \\ L+P &\approx 0,0060460117697274854279. \end{aligned}$$

Punktacja:

10 punktów - rozwiązanie części **a)** poprawne (1 praca).

8 punktów - rozwiązanie części **a)** poprawne, ale brak końcowego wyliczenia wartości całki (1 praca).

4 punkty - poprawna całka do części **a)** bez końcowego wyliczenia wartości i bez powiązania całki z L i P (1 praca).

2 punkty - rysunek pokazujący sposób szacowania części **a)** (1 praca).

0 punktów - brak istotnych kroków w kierunku rozwiązania (7 prac).

Punktacja za całe kolokwium:

Liczba osób piszących kolokwium: **11**.

Suma uzyskanych punktów: **40**.

Mnożnik kolokwium: **25** (1000/40).

Zwolnienie z kolokwium 7 i kwalifikacja do kolokwium 87 przysługuje 6 osobom mającym w tej chwili co najmniej 498 punktów w USOSie jako **Wynik LUX** – jest to próg definiujący wybraną szóstkę osób, jednak przy jej ustalaniu uwzględnione zostały także wyniki kolokwii Lux de Lux.