

KOŁOKWIUM nr 57, 24.04.2017, godz. 8:15–9:00**Zadanie 63. (10 punktów)**

Dane są takie ciągi (a_n) i (b_n) o wyrazach rzeczywistych dodatnich, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 9.$$

Udowodnić jedną z poniższych nierówności:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n b_n} \leq 5 \quad (\text{wersja łatwiejsza za 5 punktów})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n b_n} \leq 3 \quad (\text{wersja trudniejsza za 10 punktów})$$

Rozwiązanie:

Z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną liczb a_n i b_n otrzymujemy

$$\sqrt{a_n \cdot b_n} \leq \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Stąd

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n b_n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{2} + \frac{9}{2} = 5,$$

co kończy rozwiązanie łatwiejszej wersji zadania.

Z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną liczb $9a_n$ i b_n otrzymujemy

$$\sqrt{9a_n \cdot b_n} \leq \frac{9a_n + b_n}{2},$$

czyli

$$\sqrt{a_n \cdot b_n} \leq \frac{9a_n + b_n}{6}.$$

Stąd

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n b_n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3a_n}{2} + \frac{b_n}{6} \right) = \frac{3}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \frac{1}{6} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3,$$

co kończy rozwiązanie trudniejszej wersji zadania.

Punktacja:

10 punktów - rozwiązanie poprawne (2 prace).

9 punktów - rachunki poprawne, ale brak powołania się na nierówność między średnimi (1 praca).

5 punktów - dowód nierówności łatwiejszej (4 prace).

0 punktów - brak istotnych kroków w kierunku rozwiązania (2 prace).

Zadanie 64. (10 punktów)

Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5n+2)^n \cdot x^n}{(7n+3)^n}.$$

3 punkty za wyznaczenie promienia zbieżności*Rozwiązanie:*

Zastosujmy kryterium Cauchy'ego do zbadania zbieżności danego w zadaniu szeregu traktowanego jako szereg liczbowy z parametrem x . Otrzymujemy

$$\sqrt[n]{\left| \frac{(5n+2)^n \cdot x^n}{(7n+3)^n} \right|} = \frac{(5n+2) \cdot |x|}{7n+3} \rightarrow \frac{5 \cdot |x|}{7}.$$

Jeżeli $\frac{5 \cdot |x|}{7} < 1$, czyli $|x| < \frac{7}{5}$, to dany w zadaniu szereg jest zbieżny.

Jeżeli zaś $\frac{5 \cdot |x|}{7} > 1$, czyli $|x| > \frac{7}{5}$, to dany w zadaniu szereg jest rozbieżny.

Stąd wniosek, że promień zbieżności szeregu potęgowego jest równy $\frac{7}{5}$.

Pozostaje rozstrzygnąć zbieżność szeregu na końcach przedziału zbieżności, czyli dla $x = \pm 7/5$. W tym przypadku rozważymy ciąg wartości bezwzględnych wyrazów szeregu:

$$\begin{aligned} \left| \frac{(5n+2)^n \cdot x^n}{(7n+3)^n} \right| &= \frac{(5n+2)^n \cdot 7^n}{(7n+3)^n \cdot 5^n} = \frac{(35n+14)^n}{(35n+15)^n} = \left(1 - \frac{1}{35n+15} \right)^n = \\ &= \left(\left(1 - \frac{1}{35n+15} \right)^{35n+15} \right)^{\frac{n}{35n+15}} \rightarrow (e^{-1})^{1/35} = \frac{1}{\sqrt[35]{e}} \neq 0. \end{aligned}$$

Ponieważ wartości bezwzględne wyrazów szeregu dążą do liczby różnej od zera, szereg jest rozbieżny.

Odpowiedź:

Przedziałem zbieżności danego szeregu potęgowego jest przedział $(-7/5, 7/5)$.

Punktacja:

9 punktów - rozwiązanie poprawne z drobnymi usterkami (2 prace).

6 punktów - rozstrzygnięcie zbieżności tylko w jednym końcu przedziału zbieżności, z drobnymi usterkami (2 prace).

3 punkty - wyliczony promień zbieżności (4 prace).

0 punktów - brak istotnych kroków w kierunku rozwiązania (1 praca).

Punktacja za całe kolokwium:

Liczba osób piszących kolokwium: **9**.

Suma uzyskanych punktów: **91**.

Mnożnik kolokwium: **11** (zaokrąglone 1000/91).

Zwolnienie z kolokwium 8 i kwalifikacja do kolokwium 88 przysługuje 5 osobom mającym w tej chwili co najmniej 745 punktów w USOSie jako **Wynik LUX**.