

KOŁOKWIUM nr 58, 8.05.2017, godz. 8:15–9:00**Zadanie 65. (10 punktów)**

Oszacować od góry (przez dowolną, ale konkretną liczbę) normę supremum funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem

$$f(x) = \frac{6x^6 - x^2 + 7}{8x^8 - x^4 + 11}.$$

Rozwiązanie:

Oszacujemy wyrażenie definiujące funkcję f rozważając dwa przypadki:

1° Gdy $|x| < 1$, otrzymujemy:

$$\frac{6x^6 - x^2 + 7}{8x^8 - x^4 + 11} \leq \frac{6 - 0 + 7}{0 - 1 + 11} = \frac{13}{10}.$$

2° Gdy $|x| \geq 1$, otrzymujemy:

$$\frac{6x^6 - x^2 + 7}{8x^8 - x^4 + 11} \leq \frac{6x^6 - 0 + 7x^6}{8x^8 - x^8 + 0} = \frac{13}{7x^2} \leq \frac{13}{7}.$$

Wobec tego dla każdej liczby rzeczywistej x mamy

$$|f(x)| = f(x) \leq \frac{13}{7},$$

skąd wynika nierówność $\|f\| \leq 13/7$.

Punktacja:

10 punktów - rozwiązanie poprawne (4 prace).

9 punktów - poprawne oszacowania w poszczególnych przypadkach, ale brak wyraźnego sformułowania oszacowania na normę (1 praca).

3 punkty - oszacowanie dla $|x| \geq 1$ (1 praca).

0 punktów - brak istotnych kroków w kierunku rozwiązania (2 prace).

Zadanie 66. (10 punktów)

Obliczyć pole powierzchni obrotowej (torusa) powstałej przez obrót okręgu o równaniu $(x-2)^2 + y^2 = 1$ wokół osi OY .

Pole powierzchni powstałej przez obrót krzywej $\{(x, f(x)) : x \in [a, b]\}$, gdzie $0 \leq a < b$ oraz $f \in C^1([a, b])$, wokół osi OY jest równe

$$2\pi \cdot \int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

W rozwiązaniu może się też przydać wzór $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$.

Rozwiązanie:

Przekształcanie równania obracanego okręgu prowadzi kolejno do:

$$\begin{aligned} y^2 &= 1 - (x-2)^2, \\ y &= \pm \sqrt{1 - (x-2)^2}. \end{aligned}$$

Przy tym x może przebiegać przedział $[1, 3]$.

Okrąg rozdziela się więc w naturalny sposób na dwa półokręgi, o równaniach

$$y = \sqrt{1 - (x-2)^2} \quad \text{oraz} \quad y = -\sqrt{1 - (x-2)^2}.$$

Ponieważ każdy z tych półokręgów tworzy przy obrocie powierzchnię obrotową o takim samym polu, możemy wyliczyć pole powierzchni powstałej przez obrót jednego z nich, a otrzymany wynik pomnożyć przez 2.

Aby skorzystać z podanego wzoru, przyjmujemy $[a, b] = [1, 3]$ i $f(x) = \sqrt{1 - (x-2)^2}$. Wówczas

$$f'(x) = \frac{-(x-2)}{\sqrt{1 - (x-2)^2}}.$$

Zatem szukane pole jest równe

$$2 \cdot 2\pi \cdot \int_1^3 x \cdot \sqrt{1 + \frac{(x-2)^2}{1 - (x-2)^2}} dx.$$

Obliczamy je wykonując podstawienie $t = x - 2$:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 2\pi \cdot \int_1^3 x \cdot \sqrt{1 + \frac{(x-2)^2}{1 - (x-2)^2}} dx &= 4\pi \cdot \int_{-1}^1 (t+2) \cdot \sqrt{1 + \frac{t^2}{1-t^2}} dt = 4\pi \cdot \int_{-1}^1 (t+2) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \\ &= 4\pi \cdot \int_{-1}^1 t \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt + 8\pi \cdot \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt. \end{aligned}$$

Ponieważ pierwsza całka w ostatniej sumie jest równa 0 jako całka z funkcji nieparzystej po przedziale symetrycznym względem zera, kontynuujemy obliczanie drugiej całki:

$$8\pi \cdot \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = 8\pi \cdot \arcsin t \Big|_{t=-1}^1 = 8\pi \cdot (\arcsin 1 - \arcsin(-1)) = 8\pi \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2}\right) = 8\pi^2.$$

Odpowiedź: Pole torusa jest równe $8\pi^2$.

Uwaga: Nieprzypadkowo pole torusa jest iloczynem długości obracanego okręgu przez drogę określaną przy obrocie przez środek (czyli środek ciężkości) tego okręgu (twierdzenie Pappusa-Guldina).

Punktacja:

10 punktów - rozwiązanie poprawne (2 prace).

9 punktów - rozwiązanie poprawne, ale brak wyjaśnienia, dlatego mnożymy całkę przez 2 (1 praca).

5 punktów - poprawna całka, ale rachunki nie doprowadzone do końca (2 prace).

2 punkty - całka nie uwzględnia czynnika 2, rachunki nie doprowadzone do końca (3 prace).

Punktacja za całe kolokwium:

Liczba osób piszących kolokwium: **8**.

Suma uzyskanych punktów: **97**.

Mnożnik kolokwium: **10** (zaokrąglone 1000/97).