

KOŁOKWIUM nr 59, 5.06.2017, godz. 8:15–9:00**Zadanie 67.** (10 punktów)Obliczyć całkę $\int_0^{\pi} \sin^8 x \, dx$.*Rozwiązanie:*

Użyjemy liczb zespolonych do wyprowadzenia odpowiedniej tożsamości trygonometrycznej.

Przyjmijmy

$$z = \cos x + i \sin x,$$

co daje

$$z^n = \cos nx + i \sin nx, \quad z^{-n} = \cos nx - i \sin nx, \quad \sin x = \frac{z - z^{-1}}{2i}, \quad \cos nx = \frac{z^n + z^{-n}}{2}.$$

Przy tych oznaczeniach otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \sin^8 x &= \left(\frac{z - z^{-1}}{2i} \right)^8 = \frac{z^8 - 8z^6 + 28z^4 - 56z^2 + 70 - 56z^{-2} + 28z^{-4} - 8z^{-6} + z^{-8}}{256} = \\ &= \frac{\cos 8x}{128} - \frac{\cos 6x}{16} + \frac{7 \cos 4x}{32} - \frac{7 \cos 2x}{16} + \frac{35}{128}. \end{aligned}$$

Teraz możemy obliczyć daną w zadaniu całkę (zauważenie, że całka z cosinusa po pełnym okresie jest zerem, pozwala wydatnie uprościć obliczenia):

$$\int_0^{\pi} \sin^8 x \, dx = \int_0^{\pi} \left(\frac{\cos 8x}{128} - \frac{\cos 6x}{16} + \frac{7 \cos 4x}{32} - \frac{7 \cos 2x}{16} + \frac{35}{128} \right) dx = \frac{35\pi}{128}.$$

*Odpowiedź*Dana całka ma wartość $35\pi/128$.**Punktacja:****10 punktów** - rozwiązanie poprawne (3 prace).**0 punktów** - brak istotnych kroków w kierunku rozwiązania (4 prace).

Zadanie 68. (10 punktów)

Funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła na $\mathbb{R}$ oraz dwukrotnie różniczkowalna na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wiadomo, że dla każdej niezerowej liczby rzeczywistej x zachodzi równość

$$f''(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}},$$

a ponadto

$$f(-1) = -2, \quad f(1) = 2, \quad f(8) = 6.$$

Obliczyć $f(-8)$.

Rozwiązanie:

Funkcja f' jest funkcją pierwotną funkcji f'' i jest określona na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ wzorem

$$f'(x) = \int f''(x) dx = \int \frac{dx}{x^{2/3}} = 3x^{1/3} + C,$$

gdzie C oznacza funkcję przedziałami stałą. Dokładniej:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^{1/3} + C_1 & \text{jeżeli } x < 0 \\ 3x^{1/3} + C_2 & \text{jeżeli } x > 0 \end{cases}$$

dla pewnych stałych C_1, C_2 .

W konsekwencji dla $x < 0$ mamy

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int 3x^{1/3} + C_1 dx = \frac{9x^{4/3}}{4} + C_1 x + D_1$$

i podobnie

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int 3x^{1/3} + C_2 dx = \frac{9x^{4/3}}{4} + C_2 x + D_2$$

dla $x > 0$. Ponieważ f ma być ciągła w zerze, jej wartość tamże musi być równa granicy funkcji f w zerze, a ta istnieje, gdy równe są granice jednostronne, wynoszące odpowiednio D_1 i D_2 . Stąd $D_1 = D_2$ i w dalszej części rozwiązania przyjmiemy $D_1 = D_2 = D$.

Wobec tego

$$f(x) = \begin{cases} \frac{9x^{4/3}}{4} + C_1 x + D & \text{jeżeli } x < 0 \\ \frac{9x^{4/3}}{4} + C_2 x + D & \text{jeżeli } x \geq 0 \end{cases}$$

Obliczenie wartości funkcji f w trzech punktach podanych w treści zadania prowadzi do układu trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi:

$$f(-1) = \frac{9}{4} - C_1 + D = -2,$$

$$f(1) = \frac{9}{4} + C_2 + D = 2,$$

$$f(8) = 36 + 8C_2 + D = 6,$$

którego rozwiązaniem są liczby

$$C_1 = \frac{33}{4}, \quad C_2 = -\frac{17}{4}, \quad D = 4.$$

To pozwala obliczyć:

$$f(-8) = 36 - 8C_1 + D = -26.$$

Odpowiedź

Wartość funkcji f w punkcie -8 jest równa -26 .

Punktacja:

10 punktów - rozwiązanie poprawne (3 prace).

8 punktów - metoda rozwiązania poprawna, ale z błędami rachunkowymi (1 praca).

1 punkt - wzór na f nie uwzględniający, że stałe mogą być różne na poszczególnych przedziałach (3 prace).

Punktacja za całe kolokwium:

Liczba osób piszących kolokwium: **7**.

Suma uzyskanych punktów: **71**.

Mnożnik kolokwium: **14** (zaokrąglone $1000/71$).

Zwolnienie z kolokwium 10 i kwalifikacja do kolokwium 90 przysługuje 5 osobom mającym w tej chwili co najmniej 977 punktów w USOSie jako **Wynik LUX** – są to te same osoby, które z kolokwium 59 uzyskały co najmniej 8 punktów.