

KOŁOKWIUM nr 5, 4.04.2017, godz. 12:15–13:00**Zadanie 8. (10 punktów)**

Obliczyć długość krzywej

$$\left\{ \left(x, \frac{2}{3} \cdot x^{3/2} \right) : x \in [0, 15] \right\}.$$

Rozwiązanie:

Zgodnie ze wzorem na długość krzywej będącej wykresem funkcji $f(x) = \frac{2}{3} \cdot x^{3/2}$ na przedziale $[a, b] = [0, 15]$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx &= \int_0^{15} \sqrt{1 + (\sqrt{x})^2} \, dx = \int_0^{15} \sqrt{1+x} \, dx = \frac{2 \cdot (x+1)^{3/2}}{3} \Bigg|_{x=0}^{15} = \\ &= \frac{2}{3} \cdot (64 - 1) = \frac{2}{3} \cdot 63 = 42. \end{aligned}$$

Odpowiedź:

Dana w zadaniu krzywa ma długość 42.

Zadanie 9. (10 punktów)

Wiadomo, że jeżeli funkcje ciągłe $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ spełniają nierówność $f(x) \leq g(x)$ dla każdego $x \in [a, b]$, to środek ciężkości figury

$$\{(x, y) : x \in [a, b] \wedge f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

leży w punkcie $\left(\frac{X}{P}, \frac{Y}{P}\right)$, gdzie

$$X = \int_a^b x \cdot (g(x) - f(x)) dx, \quad Y = \frac{1}{2} \cdot \int_a^b (g(x))^2 - (f(x))^2 dx, \quad P = \int_a^b g(x) - f(x) dx.$$

Wyznaczyć środek ciężkości obszaru ograniczonego parabolą o równaniu $y = x^2$ i prostą o równaniu $y = x$.

Rozwiązanie:

Ponieważ dane w zadaniu parabola i prosta przecinają się w punktach $(0, 0)$ i $(1, 1)$, a przy tym $x^2 \leq x$ dla $x \in [0, 1]$, przeprowadzamy obliczenia dla $[a, b] = [0, 1]$, $f(x) = x^2$ oraz $g(x) = x$. Otrzymujemy kolejno:

$$X = \int_0^1 x \cdot (x - x^2) dx = \int_0^1 x^2 - x^3 dx = \left. \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right|_{x=0}^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12},$$

$$Y = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 x^2 - x^4 dx = \left. \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{10} \right|_{x=0}^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{5-3}{30} = \frac{1}{15},$$

$$P = \int_0^1 x - x^2 dx = \left. \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right|_{x=0}^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

W rezultacie współrzędne środka ciężkości danej figury to $X/P = (1/12)/(1/6) = 1/2$ oraz $Y/P = (1/15)/(1/6) = (2/5)$.

Odpowiedź:

Środek ciężkości danej figury leży w punkcie $(1/2, 2/5)$.