

KOŁOKWIUM nr 60, 12.06.2017, godz. 8:15–11:00**Zadanie 69. (10 punktów)**

Obliczyć całkę nieoznaczoną $\int \frac{dx}{x + \sqrt[9]{x}}$.

Rozwiązanie:

Sposób I

Wykonując podstawienie $x = t^9$ i formalnie $dx = 9t^8 dt$, otrzymujemy

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt[9]{x}} = 9 \cdot \int \frac{t^8 dt}{t^9 + t} = 9 \cdot \int \frac{t^7 dt}{t^8 + 1} = \frac{9}{8} \cdot \int \frac{8t^7 dt}{t^8 + 1} = \frac{9}{8} \cdot \ln(t^8 + 1) + C = \frac{9}{8} \cdot \ln(x^{8/9} + 1) + C.$$

Sposób II

Wykonując podstawienie $x = t^{9/8}$ i formalnie $dx = \frac{9t^{1/8} dt}{8}$, otrzymujemy

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt[9]{x}} = \frac{9}{8} \cdot \int \frac{t^{1/8} dt}{t^{9/8} + t^{1/8}} = \frac{9}{8} \cdot \int \frac{dt}{t + 1} = \frac{9}{8} \cdot \ln|t + 1| + C = \frac{9}{8} \cdot \ln(x^{8/9} + 1) + C.$$

Punktacja:

10 punktów - rozwiązanie poprawne (7 prace).

2 punkty - tylko podstawienie $x = t^9$ (1 praca).

0 punktów - brak istotnych kroków w kierunku rozwiązania (1 praca).

Zadanie 70. (20 punktów)

Dany jest taki szereg zbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich, że

Powyższa linijka została przeze mnie przypadkowo wykasowana w czasie przygotowywania zadań do druku. Bez niej teza zadania jest fałszywa. Jednak rozwiązujący albo podświadomie to założenie sobie dopowiedzieli, albo nie zauważyli subtelności, które pojawiają się przy wyrazach dowolnego znaku.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq 8 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4 \leq 64.$$

Dowieść, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \leq C,$$

gdzie $C = 16$ (za 20 punktów) lub $C = 27$ (za 10 punktów).

Rozwiązanie:

Korzystając z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{a_n a_n a_n^4} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_n + a_n^4}{3} = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4 \right) \leq \frac{8 + 8 + 64}{3} = \frac{80}{3} < \frac{81}{3} = 27 \end{aligned}$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{a_n a_n a_n^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{8a_n \cdot 8a_n \cdot a_n^4}}{4} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8a_n + 8a_n + a_n^4}{3 \cdot 4} =$$

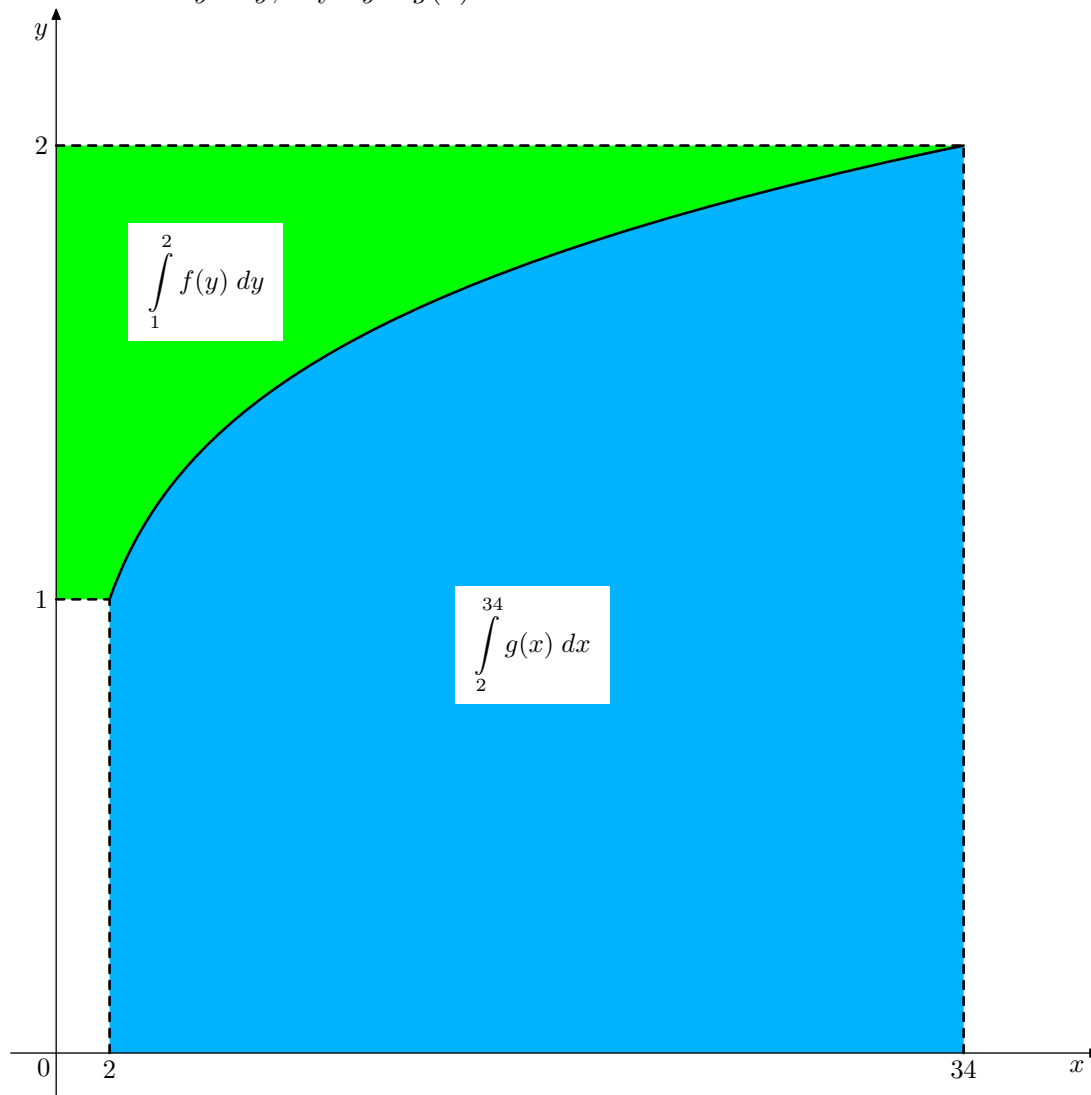
$$= \frac{1}{12} \cdot \left(8 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n + 8 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4 \right) \leq \frac{64+64+64}{12} = \frac{192}{12} = 16.$$

Punktacja:**20 punktów** - rozwiązanie poprawne (4 prace).**0 punktów** - brak istotnych kroków w kierunku rozwiązania (5 prac).**Zadanie 71. (30 punktów)**

Obliczyć całkę oznaczoną $\int_2^{34} g(x) dx$, gdzie g jest funkcją odwrotną do funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określonej wzorem $f(x) = x^5 + x$.

Rozwiązanie:

Rozważmy obszary jak na rysunku 1, gdzie krzywa rozdzielająca niebieskie i zielone pole ma równanie $x = y^5 + y$, czyli $y = g(x)$.



rys. 1

Wówczas szukana całka ma wartość równą polu niebieskiego obszaru.

Pole obszaru zielonego jest równe

$$\int_1^2 y^5 + y \, dy = \frac{y^6}{6} + \frac{y^2}{2} \Big|_{y=1}^2 = \frac{64}{6} + 2 - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = \frac{21}{2} + \frac{3}{2} = \frac{24}{2} = 12.$$

Z kolei pole zamalowane obydwoma kolorami jest równe

$$2 \cdot 34 - 1 \cdot 2 = 68 - 2 = 66,$$

skąd wynika, że pole obszaru niebieskiego jest równe $66 - 12 = 54$.

Odpowiedź

Dana całka ma wartość 54.

Punktacja:

30 punktów - rozwiązanie poprawne (5 prac).

0 punktów - brak istotnych kroków w kierunku rozwiązania (4 prace).

Zadanie **72.** (40 punktów)

Wiadomo, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2} \quad \text{dla} \quad 0 < x < 2\pi.$$

Przyjmując, że można beztrudno różniczkować i całkować występujące w rozwiązaniu szeregi wyraz za wyrazem (co wynika z faktów wykraczających poza materiał prezentowany na wykładzie), wyprowadzić wzór na

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}.$$

W miarę możliwości nie korzystać ze wzoru na $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ — wykorzystanie tego wzoru w rozwiązaniu obniży punktację. Jako wniosek z rozwiązania wyprowadzić wzór na $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Rozwiązanie:

Całkując obustronnie dany szereg funkcyjny wyraz za wyrazem otrzymujemy

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \int \frac{\pi - x}{2} \, dx = \frac{\pi x}{2} - \frac{x^2}{4} + C_0,$$

skąd

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + C \quad \text{dla} \quad 0 < x < 2\pi.$$

Ponieważ

$$\int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\cos nx}{n^2} \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0,$$

dobieramy stałą C tak, aby zerem była całka

$$\int_0^{2\pi} \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + C \, dx = \frac{x^3}{12} - \frac{\pi x^2}{4} \Big|_{x=0}^{2\pi} + 2\pi C = \frac{8\pi^3}{12} - \frac{\pi \cdot 4\pi^2}{4} + 2\pi C = \frac{2\pi^3}{3} - \pi^3 + 2\pi C =$$

$$= -\frac{\pi^3}{3} + 2\pi C.$$

Stąd $C = \pi^2/6$.

Ostatecznie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6} \quad \text{dla} \quad 0 < x < 2\pi.$$

Zauważmy, że dla $x=0$ oraz dla $x=2\pi$ prawa strona powyższego wzoru daje tę samą wartość równą $\pi^2/6$, co po uwzględnieniu równości $\cos 0 = \cos 2\pi = 1$ prowadzi do

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Punktacja:

20 punktów - dobra metoda na wyznaczenie C , ale w poarciu o sumę $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (1 praca).

10 punktów - wzór z $C=0$ (4 prace).

0 punktów - brak istotnych kroków w kierunku rozwiązania (4 prace).

Zadanie **73.** (50 punktów)

Obliczyć całkę nieoznaczoną $\int \frac{dx}{x^8+x}$.

Rozwiązanie:

Sposób I

Przepisanie funkcji podcałkowej w postaci

$$\int \frac{dx}{x^8+x} = \int \frac{x^6 dx}{x^{14}+x^7}$$

nasuwa pomysł podstawienia $t = x^7$ i formalnie $dt = 7x^6 dx$, co prowadzi do

$$\begin{aligned} \int \frac{x^6 dx}{x^{14}+x^7} &= \frac{1}{7} \cdot \int \frac{dt}{t^2+t} = \frac{1}{7} \cdot \int \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} dt = \frac{1}{7} \cdot (\ln |t| - \ln |t+1|) + C = \\ &= \frac{1}{7} \cdot (\ln |x^7| - \ln |x^7+1|) + C = \ln |x| - \frac{\ln |x^7+1|}{7} + C. \end{aligned}$$

Sposób II

Wykonując podstawienie $x = t^{-1/7}$ i formalnie $dx = -\frac{dt}{7t^{8/7}}$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^8+x} &= -\frac{1}{7} \cdot \int \frac{dt}{(t^{-8/7}+t^{-1/7}) \cdot t^{8/7}} = -\frac{1}{7} \cdot \int \frac{dt}{t+1} = -\frac{1}{7} \cdot \ln |t+1| + C = \\ &= -\frac{1}{7} \cdot \ln |x^{-7}+1| + C = -\frac{1}{7} \cdot \ln \left| \frac{x^7+1}{x^7} \right| + C = \frac{1}{7} \cdot \ln \left| \frac{x^7}{x^7+1} \right| + C. \end{aligned}$$

Punktacja:

50 punktów - rozwiązanie poprawne (4 prace).

30 punktów - dobra metoda, ale rozwiązanie z błędami (1 praca).

0 punktów - brak istotnych kroków w kierunku rozwiązania (4 prace).

Zadanie 74. (100 punktów)

Udowodnić, że suma szeregu

$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} - \frac{1}{21} - \frac{1}{23} + \frac{1}{25} + \frac{1}{27} - \frac{1}{29} - \frac{1}{31} + \frac{1}{33} + \frac{1}{35} - \dots$,
 w którym mianowniki to kolejne liczby nieparzyste, a na przemian występują po dwa wyrazy dodatnie i dwa ujemne, jest równa całce $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}$.

*Rozwiązanie:*Rozważmy funkcję f daną w postaci szeregu potęgowego

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1} \cdot (-1)^{[n/2]}}{2n+1}$$

zbieżnego w przedziale $[-1, 1]$ — na końcach tego przedziału dodanie par kolejnych wyrazów tego samego znaku prowadzi do szeregu naprzemiennego, a więc zbieżnego. Odnotujmy, że $f(0) = 0$, a $f(1)$ jest sumą szeregu danego w treści zadania.

Ponieważ szereg potęgowy można różniczkować wyraz za wyrazem wewnątrz przedziału zbieżności, otrzymujemy

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \cdot (-1)^{[n/2]} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{4n} \cdot (-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^{4n+2} \cdot (-1)^n = \frac{1}{x^4+1} + \frac{x^2}{x^4+1}$$

dla $x \in (-1, 1)$.Wobec tego szukana suma szeregu jest równa (po podstawieniu $t = 1/x$):

$$\begin{aligned}
 f(1) = f(1) - f(0) &= \int_0^1 f'(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{x^4+1} + \frac{x^2}{x^4+1} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^4+1} dx + \int_0^1 \frac{x^2}{x^4+1} dx = \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{x^4+1} dx + \int_{\infty}^1 \frac{t^{-2}}{t^{-4}+1} \frac{-dt}{t^2} = \int_0^1 \frac{dx}{x^4+1} + \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^4+1} = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}.
 \end{aligned}$$

Punktacja:**25 punktów** - dobra metoda na obliczenie całki (1 praca).**0 punktów** - brak istotnych kroków w kierunku rozwiązania (8 prac).